

## 1 Matrices y Sistemas lineales de ecuaciones

Sea  $\mathcal{M}_{n \times m} = \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  el espacio vectorial de las matrices reales con  $n$  filas y  $m$  columnas.

### 1.1 Operaciones elementales por filas

En una matriz, se consideran **operaciones elementales por filas** a las siguientes:

1. Intercambiar dos filas.
2. Multiplicar una fila por un número real no nulo.
3. Sustituir una fila por la suma de ella misma con el producto de otra por un número real.

#### Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_2 \rightarrow f_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_3 \rightarrow f_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 1.2 Matrices elementales

Se llaman **matrices elementales** a aquellas matrices cuadradas que resultan de aplicar una operación elemental a la matriz identidad.

#### Ejemplo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_3 \rightarrow f_3} E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - 2f_2 \rightarrow f_3} E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

### 1.3 Relación entre operaciones y matrices elementales

El resultado de hacer una operación elemental a una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  coincide con el resultado de multiplicar la matriz elemental  $E \in \mathcal{M}_{n \times n}$ , asociada a dicha operación elemental, por  $A$ .

#### Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_3 \rightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot A$$

#### 1.4 Formas escalonada y canónica de una matriz. Rango

Se llama **matriz escalonada o reducida** de  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  a cualquier matriz  $A_r \in \mathcal{M}_{n \times m}$  que se obtiene a partir de  $A$  mediante operaciones elementales, y en la que el primer elemento no nulo de cada fila se encuentra a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior. Las filas nulas, si las hay, en una matriz escalonada deben estar al final.

Se llama **rango** de  $A$  al número de filas no nulas de una matriz escalonada de  $A$ .

Se llama **matriz canónica por filas** de  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  a la matriz  $A_c \in \mathcal{M}_{n \times m}$ , que se obtiene a partir de  $A$  mediante operaciones elementales, en la que el primer elemento no nulo de cada fila es un uno, se encuentra a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior, y por encima de él todos los elementos son nulos.

Observa que si  $B$  se obtiene a partir de  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  después de  $p$  operaciones elementales, entonces

$$B = E_p \cdot E_{p-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$$

donde  $E_i$  es la matriz elemental asociada a la operación  $i$ -ésima. Además, si  $I \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es la matriz identidad de orden  $n$ , se tiene que

$$(A | I) \xrightarrow{\text{operaciones elementales}} (B | E) \quad \text{con} \quad B = E \cdot A$$

donde  $E = E_p \cdot E_{p-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1$  se llama **matriz de paso** de  $A$  a  $B$ .

#### Ejemplo

Si se quiere hallar una matriz escalonada, y la matriz de paso asociada, de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

se hacen las operaciones elementales necesarias adosándole la matriz identidad:

$$\begin{aligned} (A | I) &= \left( \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2 \\ f_3 - f_1 \rightarrow f_3 \\ f_4 - f_1 \rightarrow f_4}} \\ &\left( \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \left( \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}f_2 \rightarrow f_2 \\ 3f_2 - 2f_3 \rightarrow f_3}} \left( \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}f_3 \rightarrow f_3 \\ 2f_4 + f_3 \rightarrow f_4}} \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right) = (A_r | E^r) \quad \text{con} \quad A_r = E^r \cdot A$$

Puesto que la matriz escalonada tiene tres filas no nulas, su rango es tres:

$$\text{rg } A = 3$$

Para hallar la matriz canónica por filas, y la matriz de paso asociada, se continúan las operaciones elementales:

$$\begin{aligned} (A | I) &\rightarrow (A_r | E) \xrightarrow{f_1 - f_2 \rightarrow f_1} \left( \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{f_1 - f_3 \rightarrow f_1} \left( \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right) = (A_e | E^e) \quad \text{con} \quad A_e = E^e \cdot A \end{aligned}$$

## 1.5 Matriz inversa

Se llama **matriz inversa** de una matriz cuadrada  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  a otra matriz  $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n \times n}$  tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

No todas las matrices cuadradas tienen inversa. Una matriz cuadrada  $A$  se llama **regular** si tiene matriz inversa, y se llama **singular** si no la tiene.

Es fácil observar que todas las matrices elementales tienen inversa:

1. La matriz inversa de la matriz elemental asociada a intercambiar dos filas es ella misma.
2. La matriz inversa de la matriz elemental asociada a multiplicar una fila por un número, distinto de cero, es la asociada a multiplicar la misma fila por su inverso.
3. La matriz inversa de la matriz elemental asociada a sustituir una fila por ella misma más otra multiplicada por un número es la asociada a la misma operación pero multiplicando la fila por el número opuesto.

Es conocido que la existencia de matriz inversa se puede caracterizar, en términos de determinantes, como

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n} \quad \text{tiene inversa (es regular)} \iff |A| \neq 0$$

También se puede caracterizar, en términos de operaciones elementales, por el siguiente teorema:

### Teorema

Una matriz cuadrada es regular si y sólo si se puede reducir a la matriz identidad por operaciones elementales de filas.

Además, si

$$(A | I) \xrightarrow{\text{operaciones elementales}} (I | E) \quad \text{con} \quad I = E \cdot A$$

se tiene que  $A^{-1} = E$ .

## Algoritmo para el cálculo de la matriz inversa

Para hallar la matriz inversa de una matriz cuadrada  $A$  se procede así:

1. Se considera la matriz  $(A | I)$ .
2. Se obtiene una forma escalonada  $(A_r | E^r)$ .
3. Si  $A_r$  tiene algún cero en la diagonal principal, entonces la matriz  $A$  es singular (**no es invertible**).
4. Si  $A_r$  no tiene ceros en la diagonal principal, entonces  $A$  es regular (**es invertible**) y se siguen haciendo operaciones elementales hasta llegar a  $(I | E)$ .
5. La matriz inversa es  $A^{-1} = E$ .

## Ejemplo

Halla, si existe, la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A | I) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2 \\ f_3 - f_1 \rightarrow f_3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{f_2/3 \rightarrow f_2 \\ f_3 - 2f_2/3 \rightarrow f_3}} \\ &\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 & -2/3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{f_3/2 \rightarrow f_3 \\ f_2 + f_3/2 \rightarrow f_2 \\ f_1 - f_3/2 \rightarrow f_1}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 5/6 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -1/3 & 1/2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{f_1 + f_2 \rightarrow f_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -1/3 & 1/2 \end{array} \right) = (I | A^{-1}) \end{aligned}$$

de donde

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/6 & -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

## 1.6 Sistemas lineales

Un **sistema lineal** de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas es

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con  $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ , que se puede expresar en **forma matricial** como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o también como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{con} \quad A \in \mathcal{M}_{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathcal{M}_{n \times 1}, \text{ y } \mathbf{b} \in \mathcal{M}_{m \times 1}$$

Las matrices  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$  y  $\bar{A} = (A | \mathbf{b}) \in \mathcal{M}_{m \times (n+1)}$  se llaman, respectivamente, **matriz de coeficientes** y **matriz ampliada**. Cuando  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  el **sistema** se llama **homogéneo**.

Se llama **solución** del sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  a cualquier vector  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^t \in \mathcal{M}_{n \times 1}$  tal que  $A\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}$ . **Resolver** un sistema es hallar todas sus soluciones.

Dos sistemas se llaman **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

## Teorema

Si un sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene más de una solución entonces tiene infinitas soluciones.

**Demostración:** Si  $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathcal{M}_{n \times 1}$  son dos soluciones distintas del sistema, entonces, para cualesquiera  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  con  $\alpha + \beta = 1$ , se cumple que  $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}^0 + \beta\mathbf{x}^1 \in \mathcal{M}_{n \times 1}$  es también solución:

$$A\mathbf{x} = A(\alpha\mathbf{x}^0 + \beta\mathbf{x}^1) = \alpha A\mathbf{x}^0 + \beta A\mathbf{x}^1 = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{b} = (\alpha + \beta)\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

Luego si el sistema tiene dos soluciones distintas, entonces tiene infinitas soluciones.

## Clasificación de sistemas lineales

Según el número de soluciones, los sistemas se clasifican en

Sistema <b>incompatible</b>	$\iff$	No tiene soluciones
Sistema <b>compatible determinado</b>	$\iff$	Tiene solución única
Sistema <b>compatible indeterminado</b>	$\iff$	Tiene infinitas soluciones

## Teorema

Si  $(A' | \mathbf{b}')$  es la matriz que se obtiene después de aplicar un número finito de operaciones elementales a la matriz  $(A | \mathbf{b})$ , los sistemas  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  y  $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$  son equivalentes.

**Demostración:** Sea  $(A' | \mathbf{b}') = E_r \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot (A | \mathbf{b})$ , es decir

$$A' = E_r \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A \quad \text{y} \quad \mathbf{b}' = E_r \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot \mathbf{b}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^0 \text{ es solución de } A'\mathbf{x} = \mathbf{b}' &\iff A'\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}' \iff E_r \dots E_2 E_1 A\mathbf{x}^0 = E_r \dots E_2 E_1 \mathbf{b} \\ &\iff E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_r^{-1} E_r \dots E_2 E_1 A\mathbf{x}^0 = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_r^{-1} E_r \dots E_2 E_1 \mathbf{b} \\ &\iff I A\mathbf{x}^0 = I \mathbf{b} \iff A\mathbf{x}^0 = \mathbf{b} \iff \mathbf{x}^0 \text{ es solución de } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Es decir, los sistemas  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  y  $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$  son equivalentes.

## 1.7 Método de Gauss

Todo sistema lineal  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas y  $|A| \neq 0$  (o  $\text{rg } A = n$ ) es compatible determinado. Se puede resolver por el **método de Gauss**:

1. Se considera la matriz ampliada  $(A | \mathbf{b})$ .
2. Se obtiene una matriz escalonada  $(A_r | \mathbf{b}_r)$ .
3. Se resuelve el sistema equivalente  $A_r \mathbf{x} = \mathbf{b}_r$  por el método de ascenso.

### Ejemplo

Para resolver el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

por el método de Gauss, se procede así:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[f_3 - f_1 \rightarrow f_3]{f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 3 & -2 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow[f_2/3 \rightarrow f_2]{f_3 - f_2 \rightarrow f_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

y se resuelve, por el método de ascenso, el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ y - z = -3 \\ z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

## 1.8 Teorema de Rouché-Frobenius

Si  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es un sistema de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, entonces:

1. Si  $\text{rg } A \neq \text{rg } (A | \mathbf{b})$ , el sistema es incompatible.
2. Si  $\text{rg } A = \text{rg } (A | \mathbf{b}) = n$ , el sistema es compatible determinado.
3. Si  $\text{rg } A = \text{rg } (A | \mathbf{b}) = k < n$ , el sistema es compatible indeterminado, y su solución depende de  $n - k$  parámetros.

## 1.9 Resolución de sistemas lineales por el método de Gauss

Para resolver el sistema lineal  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, se procede como sigue:

1. Se considera la matriz ampliada  $(A | \mathbf{b})$ .
2. Se obtiene una matriz escalonada  $(A_r | \mathbf{b}_r)$ .
3. Entonces, se pueden presentar los siguientes casos:
  - (a) Si  $\text{rg } A_r \neq \text{rg } (A_r | \mathbf{b}_r)$ , el sistema es incompatible. No hay soluciones.

- (b) Si  $\text{rg } A_r = \text{rg } (A_r | \mathbf{b}_r) = n$ , el sistema es compatible determinado. Su única solución se obtiene resolviendo por el método de Gauss el sistema resultante después de eliminar las ecuaciones nulas (si las hay).
- (c) Si  $\text{rg } A_r = \text{rg } (A_r | \mathbf{b}_r) = k < n$ , el sistema es compatible indeterminado. Su solución se obtiene resolviendo por el método de ascenso el sistema que se obtiene al pasar al segundo miembro, como parámetros, las  $n - k$  incógnitas que no son comienzo (primer elemento no nulo) de alguna fila de  $A_r$ .

## Ejemplo

Para resolver el sistema de 3 ecuaciones con 5 incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & + x_4 & = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\ x_1 + x_2 & + x_4 + x_5 & = -1 \end{cases}$$

se obtiene, en primer lugar, la matriz reducida de la ampliada:

$$(A | \mathbf{b}) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{f_2 - f_1 \rightarrow f_2 \\ f_3 - f_1 \rightarrow f_3}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = (A_r | \mathbf{b}_r)$$

Puesto que  $\text{rg } A_r = \text{rg } (A_r | \mathbf{b}_r) = 3 < 5$  el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones se obtienen pasando al segundo miembro, como parámetros, las incógnitas que no son comienzo de alguna ecuación,  $x_2 = \lambda$  y  $x_4 = \mu$ , y resolviendo el sistema resultante por el método de ascenso:

$$\begin{cases} x_1 & = -1 - \lambda - \mu \\ x_2 + x_5 & = 1 - \mu \\ x_5 & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -1 - \lambda - \mu \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 1 - \mu \\ x_4 = \mu \\ x_5 = 0 \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

## 1.10 Sistemas lineales homogéneos

Puesto que  $\text{rg } A = \text{rg } (A | \mathbf{0})$ , el sistema lineal homogéneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, siempre es compatible:

1. Si  $\text{rg } A = n$ , el sistema homogéneo es compatible determinado, y la única solución es la **solución trivial**  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .
2. Si  $\text{rg } A = k < n$ , el sistema homogéneo es compatible indeterminado, y su solución depende de  $n - k$  parámetros.

## Ejemplo

Para resolver el sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 9y - 5z = 0 \end{cases}$$

se calcula una matriz escalonada de la matriz de coeficientes (no es necesario considerar la columna de los términos independientes pues son siempre nulos):

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2 \\ f_3 - f_1 \rightarrow f_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 10 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - 2f_2 \rightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puesto que  $\text{rg } A = 2$ , el sistema es compatible indeterminado con solución dependiente de  $3 - 2 = 1$  parámetro. Pasando  $x_3 = \lambda$  al segundo miembro, y resolviendo el sistema resultante por el método de ascenso, se obtiene la solución:

$$\begin{cases} x - y = -\lambda \\ 5y = 3\lambda \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{-2\lambda}{5} \\ y = \frac{3\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

### 1.11 Eliminación de parámetros

**Eliminar parámetros en**

$$\begin{cases} x_1 = b_1 + a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + a_{1r}\lambda_r \\ x_2 = b_2 + a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \dots + a_{2r}\lambda_r \\ \vdots \\ x_n = b_n + a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \dots + a_{nr}\lambda_r \end{cases}$$

es equivalente a encontrar un sistema del que sea solución, y ésto es equivalente a obtener los valores  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  para los que el sistema

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + a_{1r}\lambda_r = x_1 - b_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \dots + a_{2r}\lambda_r = x_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \dots + a_{nr}\lambda_r = x_n - b_n \end{cases}$$

es compatible, es decir que se verifica:

$$\text{rg} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix} = \text{rg} \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & x_1 - b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & x_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} & x_n - b_n \end{array} \right)$$

### Ejemplo

Para eliminar los parámetros  $a, b \in \mathbb{R}$  en la expresión:

$$\begin{cases} x_1 = a + 2b \\ x_2 = a - b \\ x_3 = 1 + b \\ x_4 = a + b - 1 \end{cases}$$



se impone la condición de que el sistema

$$\begin{cases} a + 2b = x_1 \\ a - b = x_2 \\ b = x_3 - 1 \\ a + b = x_4 + 1 \end{cases}$$

tiene solución (es compatible), para lo que se necesita que:

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 - 1 \\ 1 & 1 & x_4 + 1 \end{array} \right)$$

Para imponer esta condición, se busca una matriz escalonada de ambas matrices, lo que se hace simultáneamente considerando la segunda matriz:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 - 1 \\ 1 & 1 & x_4 + 1 \end{array} \right) &\xrightarrow[\substack{f_2 - f_1 \rightarrow f_2 \\ f_4 - f_1 \rightarrow f_4}]{f_2 - f_1 \rightarrow f_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -3 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & x_3 - 1 \\ 0 & -1 & x_4 - x_1 + 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\substack{3f_3 + f_2 \rightarrow f_3 \\ 3f_4 - f_2 \rightarrow f_4}]{3f_3 + f_2 \rightarrow f_3} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -3 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 3(x_3 - 1) + (x_2 - x_1) \\ 0 & 0 & 3(x_4 - x_1 + 1) - (x_2 - x_1) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Para que las dos matrices tengan el mismo rango, es necesario que en la tercera columna los elementos de las filas tercera y cuarta sean nulos, es decir que:

$$\begin{cases} 3(x_3 - 1) + (x_2 - x_1) = 0 \\ 3(x_4 - x_1 + 1) - (x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

con lo que se tiene la condición:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

## 2 Espacios vectoriales

### 2.1 Espacio vectorial

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  (en general  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) es un conjunto  $V \neq \emptyset$  sobre el que hay definidas dos operaciones:

1. **Suma:**

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\longrightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{aligned}$$

verificando las siguientes propiedades:

- (a) Conmutativa:  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ ,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ .
- (b) Asociativa:  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ ,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- (c) Elemento neutro: Existe  $\mathbf{0} \in V$  tal que  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ ,  $\forall \mathbf{u} \in V$ .
- (d) Elemento opuesto: Para todo  $\mathbf{u} \in V$  existe  $-\mathbf{u} \in V$  tal que  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

2. **Producto por un escalar:**

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, \mathbf{u}) &\longrightarrow \lambda \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

verificando las siguientes propiedades:

- (a)  $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ ,  $\forall \mathbf{u} \in V$ .
- (b)  $\lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{u}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{u}$ ,  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,  $\forall \mathbf{u} \in V$ .
- (c)  $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{u}$ ,  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,  $\forall \mathbf{u} \in V$ .
- (d)  $\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ .

Los elementos de un espacio vectorial se llaman **vectores**.

Un **espacio vectorial real** es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales.

**Nota:** En lo sucesivo, siempre que no haya confusión se omitirá el punto  $(\cdot)$  en la operación producto por escalar.

### Ejemplos

Son espacios vectoriales reales, con las operaciones que se indican, los siguientes:

1. El conjunto de  $n$ -uplas de números reales:

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_i)_{1 \leq i \leq n} : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

con las operaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \mathbf{x} &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

2. El conjunto de matrices de dimensión  $n \times m$ :

$$\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) = \left\{ A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} : a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \right\}$$

con las operaciones: suma de matrices y producto por números reales.

3. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales en la variable  $x$ :

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k : n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

con las clásicas operaciones de suma y producto por números reales.

4. El conjunto de todos los polinomios, con coeficientes reales en la variable  $x$ , de grado menor o igual que  $n$ :

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k : a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

con las mismas operaciones anteriores.

5. El conjunto de todas las funciones reales:

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

con las operaciones: suma de funciones y producto por números reales.

6. El conjunto de todas las sucesiones de números reales:

$$\mathcal{S} = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R}, n \geq 1\}$$

con las operaciones: suma de sucesiones y producto por números reales.

7. Si  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ , entonces  $\mathbb{Z}_2^n$  es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{Z}_2$ , con las operaciones:

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1 \quad \text{y} \quad 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1$$

## 2.2 Propiedades

Si  $V$  es un espacio vectorial, entonces

1.  $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
2.  $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$ .

para todo  $u \in V$ .

## 2.3 Subespacio vectorial

Se llama **subespacio vectorial** de un espacio vectorial  $V$  a cualquier subconjunto no vacío  $S \subset V$  que es espacio vectorial con las mismas operaciones definidas sobre  $V$ .

## 2.4 Caracterización de subespacios vectoriales

Si  $V$  es un espacio vectorial y  $S \subset V$ ,  $S \neq \emptyset$ , entonces

$$S \text{ es subespacio vectorial de } V \iff \begin{cases} (1) \mathbf{u} + \mathbf{v} \in S, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S \\ (2) \lambda \mathbf{u} \in S, \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ y } \forall \mathbf{u} \in S \end{cases}$$

**Demostración:**

( $\Rightarrow$ ) Evidente, pues  $S$  es espacio vectorial.

( $\Leftarrow$ ) (1) y (2) garantizan que las operaciones están bien definidas sobre  $S$ , al ser éste un conjunto cerrado respecto de ellas. Además, por ser  $S$  un subconjunto de  $V$ , se verifican todas las propiedades de la suma y el producto siempre que sea cierto que  $\mathbf{0} \in S$  y que el opuesto de cualquier elemento de  $S$  está en  $S$ . Ahora bien, para cualquier  $\mathbf{u} \in S$ ,

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{u} \in S \quad \text{y} \quad -\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u} \in S$$

luego  $S$  es un subespacio vectorial de  $V$ .

## 2.5 Corolario

Si  $V$  es un espacio vectorial y  $S \subset V$ ,  $S \neq \emptyset$ , entonces

$$S \text{ es subespacio vectorial de } V \iff \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in S, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$$

## Ejemplos

1. En todo espacio vectorial  $V$ , el conjunto  $\{\mathbf{0}\}$  es un subespacio vectorial llamado **subespacio trivial**.
2. Sea  $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  el espacio vectorial de las funciones reales. Son subespacios vectoriales:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(0) = 0\} & S_2 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f \text{ continua}\} \\ S_3 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f \text{ acotada}\} & S_4 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f \text{ derivable}\} \end{aligned}$$

y no lo son

$$S_5 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\} \quad S_6 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : |f(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

3. Son subespacios vectoriales del espacio vectorial  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ , de todos los polinomios en  $x$  con coeficientes reales, los siguientes:

$$S_1 = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : p'(0) = 0\} \quad S_2 = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : a_0 = a_1 = 0\}$$

donde  $a_0$  y  $a_1$  son los coeficientes de grado 0 y 1, respectivamente. No son subespacios vectoriales:

$$S_3 = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \text{grado}(p) = 4\} \quad S_4 = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \text{el grado de } p \text{ es par}\}$$

4. En el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de orden  $n$ , el subconjunto de las matrices simétricas es un subespacio vectorial, y no lo son el subconjunto de las matrices regulares ni el de las matrices singulares.

5. El conjunto de soluciones del sistema homogéneo  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$ .
6. Son subespacios vectoriales de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ :

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

y no lo es

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

## 2.6 Combinación lineal

Sea  $V$  un espacio vectorial. Se dice que  $\mathbf{v} \in V$  es **combinación lineal** de los vectores  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ , si existen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tales que

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$$

### Ejemplos

1. En  $\mathbb{R}^3$ , para averiguar si el vector  $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$  es combinación lineal de  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 0)$  y  $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$ , se plantea la ecuación vectorial:

$$(1, 2, 3) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(2, 4, 0) + \gamma(0, 0, 1)$$

que equivale al siguiente sistema de ecuaciones, cuyas soluciones son las que se indican:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta &= 1 \\ \alpha + 4\beta &= 2 \\ \alpha &+ \gamma = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1/2 \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

Luego  $\mathbf{v} = 0\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$ , y el vector  $\mathbf{v}$  es combinación lineal de  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  (y también de  $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ).

2. En  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , para averiguar si la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  es combinación lineal de  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  y  $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ , se plantea la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \alpha + 3\beta = -1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 2 \\ 2\alpha + 5\beta = 4 \end{cases}$$

Este sistema es incompatible, luego  $A$  no es combinación lineal de  $\{A_1, A_2\}$ .

## 2.7 Dependencia e independencia lineal de vectores

Sea  $V$  un espacio vectorial. Se dice que el conjunto de vectores  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$  es **linealmente dependiente** si y sólo si existen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ , con algún  $\alpha_i \neq 0$ , tales que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ . En caso contrario, se dice que el conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es **linealmente independiente**.

Para estudiar si un conjunto de vectores  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es linealmente dependiente o independiente, se plantea la ecuación

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

y se estudian sus soluciones. Si admite alguna solución no nula el conjunto de vectores es linealmente dependiente, y si sólo admite la solución nula es linealmente independiente.

### Ejemplos

1. En  $\mathbb{R}^4$ , los vectores  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, 2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)$  y  $\mathbf{v}_3 = (2, 1, -1, 1)$  son linealmente independientes, pues

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \gamma \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \implies \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$$

2. En  $\mathbb{R}^4$ , los vectores  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , y  $\mathbf{v}_3$ , del ejemplo anterior, y  $\mathbf{v}_4 = (1, 0, -1, 4)$  son linealmente dependientes, pues

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \gamma \mathbf{v}_3 + \delta \mathbf{v}_4 = \mathbf{0} \implies \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma + \delta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - \gamma - \delta = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma + 4\delta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = -2t \\ \beta = -t \\ \gamma = t \\ \delta = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

que admite soluciones no nulas. Por ejemplo, para  $t = -1$ ,  $2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ .

## 2.8 Propiedades

En un espacio vectorial  $V$  se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $\{\mathbf{v}\}$  linealmente dependiente  $\iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$
2.  $\mathbf{0} \in A \subset V \implies A$  es linealmente dependiente
3.  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  linealmente dependiente  $\iff \mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$  (son proporcionales)
4.  $A$  linealmente independiente y  $B \subset A \implies B$  es linealmente independiente
5.  $A$  linealmente dependiente y  $A \subset B \implies B$  es linealmente dependiente
6.  $A$  linealmente dependiente  $\iff$  Existe  $\mathbf{v} \in A$  que es combinación lineal de  $A \setminus \{\mathbf{v}\}$
7.  $A$  linealmente independiente  $\iff$  No existe  $\mathbf{v} \in A$  que sea combinación lineal de  $A \setminus \{\mathbf{v}\}$

## 2.9 Lema

Si  $V$  es un espacio vectorial y  $A = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subset V$ , entonces

$$L(A) = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{v}_i : \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}$$

es un subespacio vectorial de  $V$ , que se llama **subespacio generado** por  $A$ . El conjunto  $A$  se llama **sistema de generadores** de  $L(A)$ .

**Demostración:** Si  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{v}_i \in L(A)$ ,  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{v}_i \in L(A)$ , y  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , entonces

$$\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} = \sum_{i=1}^m (\lambda \alpha_i + \mu \beta_i) \mathbf{v}_i \in L(A)$$

## Ejemplos

1. Si  $V = \mathbb{R}^3$  y  $A = \{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, -1)\}$ , entonces

$$L(A) = \{\mathbf{v} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{v} = (\alpha + \beta, \beta, \alpha - \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Las ecuaciones

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

se llaman **ecuaciones paramétricas** de  $L(A)$ . Las ecuaciones paramétricas son útiles para obtener, dando valores reales a los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , los diferentes vectores de  $L(A)$ . Así, por ejemplo, para  $\alpha = 2$  y  $\beta = -1$  se obtiene el vector  $\mathbf{v} = (1, -1, 3) \in L(A)$ . Eliminando parámetros en las ecuaciones paramétricas, se obtiene:

$$x - 2y - z = 0$$

que se llaman **ecuaciones implícitas** de  $L(A)$  (en este caso sólo una). Las ecuaciones implícitas son útiles para comprobar si un determinado vector pertenece a  $L(A)$  (el vector debe verificar todas las ecuaciones). Por ejemplo, el vector  $(3, 1, 1) \in L(A)$  pues  $3 - 2 \cdot 1 - 1 = 0$ , y el vector  $(-1, 2, 1) \notin L(A)$ , pues  $-1 - 2 \cdot 2 - 1 \neq 0$ .

2. En  $\mathbb{R}^4$ , las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio generado por

$$A = \{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (1, 2, -1, 3)\}$$

son

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = -\alpha + 2\beta \\ x_3 = \alpha - \beta \\ x_4 = -\alpha + 3\beta \end{cases} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

## 2.10 Propiedades

Si  $A$  y  $B$  son dos subconjuntos finitos de un espacio vectorial  $V$ , entonces:

1.  $A \subset B \implies L(A) \subset L(B)$ .
2.  $A \subset L(B) \iff L(A) \subset L(B)$ .
3.  $L(A) = L(B) \iff A \subset L(B)$  y  $B \subset L(A)$ .

## 2.11 Proposición

Sea  $V$  un espacio vectorial y  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subset V$ . Si  $\mathbf{v}_m$  es combinación lineal de  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}\}$ , entonces

$$L(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}) = L(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}\})$$

**Demostración:**

( $\supset$ ) Si  $\mathbf{v} \in L(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}\})$ , entonces

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathbf{v}_i + 0\mathbf{v}_m \in L(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\})$$

( $\subset$ ) Sea  $\mathbf{v}_m = \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i \mathbf{v}_i$ . Si  $\mathbf{v} \in L(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\})$ , entonces

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathbf{v}_i + \alpha_m \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i + \alpha_m \beta_i) \mathbf{v}_i \in L(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}\})$$

## 2.12 Base de un espacio vectorial

Se llama **base** de un espacio vectorial (o subespacio vectorial) a cualquiera de sus sistemas de generadores que esté formado por vectores linealmente independientes.

## 2.13 Teorema de la base

Todo espacio vectorial  $V \neq \{\mathbf{0}\}$  (o subespacio vectorial) con un sistema de generadores finito posee al menos una base.

**Demostración:** Sea  $A_m = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  un sistema de generadores de  $V$ . Si  $A_m$  es linealmente independiente, entonces  $B = A_m$  es una base de  $V$ . En caso contrario habrá un vector, que se puede suponer  $\mathbf{v}_m$ , que es combinación lineal de los restantes, por lo que

$$V = L(A_m) = L(A_{m-1}) \quad \text{con} \quad A_{m-1} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}\}$$

Si  $A_{m-1}$  es linealmente independiente, entonces  $B = A_{m-1}$  es una base de  $V$ . En caso contrario, se repite el razonamiento anterior hasta llegar a algún  $A_i = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\}$  que sea linealmente independiente y que será la base.

El final del proceso anterior está asegurado pues, en el peor de los casos, después de  $m-1$  pasos se llegaría a  $A_1 = \{\mathbf{v}_1\}$  con  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$  (pues  $L(A_1) = V \neq \{\mathbf{0}\}$ ), y este sería la base.

## 2.14 Coordenadas respecto de una base

Si  $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base del espacio vectorial  $V$ , entonces para todo  $\mathbf{v} \in V$  se tiene que

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i$$

Se llaman **coordenadas** de  $\mathbf{v}$  respecto de la base  $B$  a la  $n$ -upla  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ , y se indica

$$\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)_B$$



## 2.15 Unicidad de las coordenadas

En un espacio vectorial, las coordenadas de un vector respecto de una base finita son únicas.

**Demostración:** Si  $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base de  $V$ , y  $\mathbf{v} \in V$ , entonces

$$\begin{cases} \mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)_B = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v} = (x'_1, \dots, x'_n)_B = \sum_{i=1}^n x'_i \mathbf{v}_i \end{cases} \implies \sum_{i=1}^n (x_i - x'_i) \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \implies x_i = x'_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

ya que los vectores de  $B$  son linealmente independientes. Luego las coordenadas de cualquier vector respecto de la base son únicas.

## 2.16 Bases usuales

En cada uno de los siguientes espacios vectoriales, la base usual es la que se indica:

1. En  $\mathbb{R}^n$ ,

$$B_c = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)\}$$

que también se llama **base canónica**.

2. En  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ ,  $B =$

$$= \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{n \cdot m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. En  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ ,

$$B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

Siempre que no haya confusión, se suele omitir la indicación de la base en la expresión de las coordenadas respecto de las bases usuales.

## 2.17 Uso de operaciones elementales para obtención de bases

Sea  $V = \mathbb{R}^n$  y  $A = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subset V$ . Si se representa también por  $A$  la matriz cuyas filas son los vectores de  $A$ , y  $A_r$  es una matriz reducida de  $A$ , entonces una base de  $L(A)$  está formada por los vectores correspondientes a las filas no nulas de  $A_r$ . Si la matriz reducida que se considera es la escalonada, la base que se obtiene es la más sencilla posible.

Todo lo anterior es igualmente válido cuando  $V$  es un espacio vectorial arbitrario con base finita, y sus vectores vienen expresados por sus coordenadas respecto de dicha base.

## Ejemplos

1. Si  $A = \{\mathbf{v}_1 = (1, 3, 4), \mathbf{v}_2 = (2, -1, 1), \mathbf{v}_3 = (3, 2, 5), \mathbf{v}_4 = (5, 15, 20)\} \subset \mathbb{R}^3$ , entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 15 & 20 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y  $B = \{\mathbf{u}_1 = (1, 3, 4), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1)\}$  es una base de  $L(A)$ . Para hallar las coordenadas del vector  $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$  respecto de dicha base, se procede así:

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 \implies (2, -1, 1) = \alpha(1, 3, 4) + \beta(0, 1, 1) \implies \begin{cases} \alpha = 2 \\ 3\alpha + \beta = -1 \\ 4\alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -7 \end{cases}$$

de donde  $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 - 7\mathbf{u}_2 = (2, -7)_B$ . En referencia a esta base, las ecuaciones paramétricas e implícitas de  $L(A)$  son:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 3\alpha + \beta \\ z = 4\alpha + \beta \end{cases} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies x + y - z = 0$$

2. Antes de proceder a hallar una base del subespacio generado por

$$A = \{\mathbf{p}_1 = 1 - x^3, \mathbf{p}_2 = x - x^3, \mathbf{p}_3 = 1 - x, \mathbf{p}_4 = 1 + x - 2x^3\} \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$$

se expresan los vectores (polinomios) respecto de la base usual:

$$A = \{\mathbf{p}_1 = (1, 0, 0, -1), \mathbf{p}_2 = (0, 1, 0, -1), \mathbf{p}_3 = (1, -1, 0, 0), \mathbf{p}_4 = (1, 1, 0, -2)\}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y una base de  $L(A)$  es:

$$B = \{\mathbf{q}_1 = (1, 0, 0, -1) = 1 - x^3, \mathbf{q}_2 = (0, 1, 0, -1) = x - x^3\}$$

Para hallar las coordenadas del polinomio  $\mathbf{p} = -1 + 2x - x^3 = (-1, 2, 0, -1)$  respecto de dicha base, se procede así:

$$\mathbf{p} = (-1, 2, 0, -1) = \alpha(1, 0, 0, -1) + \beta(0, 1, 0, -1) \implies \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \\ 0 = 0 \\ -\alpha - \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

de donde  $\mathbf{p} = -\mathbf{q}_1 + 2\mathbf{q}_2 = (-1, 2)_B$ . En referencia a esta base, y representando un polinomio arbitrario por  $\mathbf{p} = a + bx + cx^2 + dx^3 = (a, b, c, d)$ , las ecuaciones paramétricas e implícitas de  $L(A)$  son:

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = 0 \\ d = -\alpha - \beta \end{cases} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} a + b + d = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

3. Antes de proceder a hallar una base del subespacio generado en  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  por  $A =$

$$= \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, M_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

se expresan los vectores (matrices) respecto de la base usual:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} M_1 = (1, -1, 0, -1), M_2 = (0, 0, 1, 1), M_3 = (2, -2, 2, -2), M_4 = (-3, 3, 5, 3), \\ M_5 = (-1, 1, 3, 1) \end{array} \right\}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y una base de  $L(A)$  es  $B =$

$$\left\{ N_1 = (1, -1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, N_2 = (0, 0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, N_3 = (0, 0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Puesto que la base se ha obtenido llegando hasta la matriz escalonada, ahora es mucho más fácil obtener las coordenadas de una matriz respecto de ella. De esta manera

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = (2, -2, 3, -2) = 2N_1 + 3N_2 - 2N_3 = (2, 3, -2)_B$$

En referencia a esta base, y representando una matriz arbitraria por

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, b, c, d)$$

las ecuaciones paramétricas e implícitas de  $L(A)$  son:

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = -\alpha \\ c = \beta \\ d = \gamma \end{cases} ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \implies a + b = 0$$

## 2.18 Proposición

Si  $V \neq \{0\}$  es un espacio vectorial con una base formada por  $n$  vectores, entonces cualquier conjunto de  $n + 1$  vectores es linealmente dependiente.

**Demostración:** Sea  $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  una base de  $V$  y  $A = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}\} \subset V$ , con

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{v}_j = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})_B, \quad 1 \leq i \leq n + 1$$

Para que una combinación lineal de los vectores de  $A$  sea igual al vector cero, se ha de cumplir:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{u}_i = \left( \sum_{i=1}^{n+1} a_{i1} \alpha_i, \sum_{i=1}^{n+1} a_{i2} \alpha_i, \dots, \sum_{i=1}^{n+1} a_{in} \alpha_i \right) = \mathbf{0} \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n+1} a_{i1} \alpha_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_{i2} \alpha_i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_{in} \alpha_i = 0 \end{cases}$$

que es un sistema lineal homogéneo de  $n$  ecuaciones con  $n + 1$  incógnitas, y tiene por tanto infinitas soluciones  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ . Luego  $A$  es linealmente dependiente.

### 2.19 Teorema del cardinal o de la dimensión

Todas las bases de un espacio vectorial  $V \neq \{\mathbf{0}\}$  tienen el mismo número de elementos (cardinal).

**Demostración:** Sean  $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  y  $B_2 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$  dos bases de  $V$ . Puesto que  $B_1$  es base y  $B_2$  es linealmente independiente,  $m \leq n$ , y puesto que  $B_2$  es base y  $B_1$  es linealmente independiente,  $n \leq m$ . Luego  $m = n$ .

### 2.20 Dimensión de un espacio vectorial

Se llama **dimensión** de un espacio vectorial  $V \neq \{\mathbf{0}\}$ , que se representa por  $\dim V$ , al cardinal de una cualquiera de sus bases. La dimensión de  $V = \{\mathbf{0}\}$  es cero.

**Observación:** Una base de un espacio vectorial  $V \neq \{\mathbf{0}\}$  de dimensión  $n$  está formada por cualesquiera  $n$  vectores linealmente independientes.

### 2.21 Teorema de extensión de la base

Sea  $V \neq \{\mathbf{0}\}$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $A = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \subset V$  un conjunto linealmente independiente de  $r < n$  vectores. Entonces existen  $\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$  tales que  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es base de  $V$ .

**Demostración:** Puesto que  $A$  es linealmente independiente y su cardinal es  $r < n$ ,  $A$  no es sistema de generadores de  $V$ , luego existirá  $\mathbf{v}_{r+1} \in V$  tal que  $\mathbf{v}_{r+1} \notin L(A)$ . Entonces  $A_1 = A \cup \{\mathbf{v}_{r+1}\}$  es linealmente independiente.

Si  $r + 1 = n$ ,  $A_1$  es base. En caso contrario, se repite el proceso anterior para obtener  $A_2$  linealmente independiente con  $r + 2$  vectores, y así sucesivamente.

### 2.22 Interpretación geométrica de subespacios

Sean  $V = \mathbb{R}^n$  y  $S \subset \mathbb{R}^n$  es un subespacio vectorial.

1. Si  $\dim S = 0$ ,  $S = \{\mathbf{0}\}$  es un **punto** (el origen).
2. Si  $\dim S = 1$ ,  $S = L(\{\mathbf{u}\})$  es la **recta** que pasa por el origen con vector de dirección  $\mathbf{u}$ .
3. Si  $\dim S = 2$ ,  $S = L(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})$  es el **plano** que pasa por el origen con vectores de dirección  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .
4. Si  $2 < k = \dim S < n - 1$ ,  $S$  es un  **$k$ -plano** que pasa por el origen.
5. Si  $\dim S = n - 1$ ,  $S$  es un **hiperplano** que pasa por el origen.
6. Si  $\dim S = n$ ,  $S = \mathbb{R}^n$  es todo el espacio.

### 2.23 Suma e intersección de subespacios

Si  $S$  y  $T$  son dos subespacios vectoriales, de un mismo espacio vectorial  $V$ , se define su **intersección** y **suma** como

$$S \cap T = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \in S \text{ y } \mathbf{v} \in T\} \quad \text{y} \quad S + T = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V : \mathbf{u} \in S \text{ y } \mathbf{v} \in T\}$$

respectivamente. Los conjuntos  $S \cap T$  y  $S + T$  son subespacios vectoriales.

#### Ejemplo

Sean  $S = \{(x, y, z) : y = 0\}$  y  $T = \{(x, y, z) : x - z = 0\}$  dos subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^3$ . Los vectores de  $S \cap T$  son aquellos que están en  $S$  y  $T$ , por lo que sus ecuaciones implícitas son la unión de las de ambos subespacios. Por lo tanto, las ecuaciones y una base de  $S \cap T$  son

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \implies B_{S \cap T} = \{(1, 0, 1)\}$$

Un sistema de generadores de  $S + T$  es la unión de una base de  $S$  con otra de  $T$ . Puesto que  $B_S = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$  y  $B_T = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ , entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies B_{S+T} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \implies S + T = \mathbb{R}^3$$

Se puede observar que la representación de un vector de  $S + T$  como suma de un vector de  $S$  y otro de  $T$  no es única. Por ejemplo,

$$\mathbf{u} = (1, 1, 1) = (1, 0, 1) + (0, 1, 0) = (3, 0, 3) + (-2, 1, -2)$$

siendo, en cada suma, el primer vector de  $S$  y el segundo de  $T$ .

### 2.24 Suma directa de subespacios

Si  $S$  y  $T$  son dos subespacios vectoriales, de un mismo espacio vectorial  $V$ , se dice que  $S + T$  es **suma directa** de los subespacios  $S$  y  $T$ , que se representa por  $S \oplus T$ , si es única la expresión de cada vector de la suma como un vector de  $S$  más otro de  $T$ .

### 2.25 Caracterización de la suma directa

Sean  $S$  y  $T$  dos subespacios vectoriales de  $V$ . Entonces

$$\text{La suma de } S \text{ y } T \text{ es directa} \iff S \cap T = \{\mathbf{0}\}$$

#### Demostración:

( $\Rightarrow$ ) Si  $S \cap T \neq \{\mathbf{0}\}$ , entonces existe  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  con  $\mathbf{v} \in S \cap T$ , de donde  $\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v}$ , y la suma no sería directa.

( $\Leftarrow$ ) Si  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2$ , entonces  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 \in S \cap T$ , luego  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$  de donde  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$ , y la suma sería directa.

## 2.26 Fórmula de la dimensión

Sean  $S$  y  $T$  subespacios vectoriales de un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita. Entonces

$$\dim(S \cap T) + \dim(S + T) = \dim S + \dim T$$

**Demostración:** Si  $\dim S = n$ ,  $\dim T = m$ ,  $\dim(S \cap T) = r$  y  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$  es una base de  $S \cap T$ , usando el teorema de extensión de la base, sean

$$B_S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\} \quad \text{y} \quad B_T = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_{r+1}, \dots, \mathbf{w}_m\}$$

bases de  $S$  y  $T$ , respectivamente. Para demostrar la fórmula de la dimensión, es suficiente demostrar que

$$B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_{r+1}, \dots, \mathbf{w}_m\}$$

es una base de  $S + T$ . En primer lugar,  $B$  es linealmente independiente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=r+1}^m \beta_j \mathbf{w}_j = \mathbf{0} &\implies \sum_{j=r+1}^m \beta_j \mathbf{w}_j = -\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \in S \cap T \implies \sum_{j=r+1}^m \beta_j \mathbf{w}_j = \sum_{j=1}^r \beta_j \mathbf{v}_j \\ &\implies \sum_{j=1}^r \beta_j \mathbf{v}_j - \sum_{j=r+1}^m \beta_j \mathbf{w}_j = \mathbf{0} \implies \beta_j = 0, 1 \leq j \leq m \implies \beta_j = 0, r+1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

pues  $B_T$  es base de  $T$ , y entonces

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \implies \alpha_i = 0, 1 \leq i \leq n$$

pues  $B_S$  es base de  $S$ . Finalmente,  $B$  es sistema de generadores de  $S + T$ , pues si  $\mathbf{u} \in S + T$  entonces

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^r \beta_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=r+1}^m \beta_i \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i) \mathbf{v}_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=r+1}^m \beta_i \mathbf{w}_i$$

### Ejemplo

En  $\mathbb{R}^4$  se consideran los subespacios vectoriales

$$S = L(\{(1, 0, -1, 2), (0, 1, 1, 0)\}) \quad \text{y} \quad T = L(\{(1, 0, 1, -1), (0, 1, -1, 3)\})$$

Puesto que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

una base de  $S + T$  es  $B_{S+T} = \{(1, 0, -1, 2), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 2, -3)\}$ , y sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -\alpha + \beta + 2\gamma \\ x_4 = 2\alpha - 3\gamma \end{cases} ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \implies x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0$$

Usando la fórmula de la dimensión,  $\dim(S \cap T) = 2 + 2 - 3 = 1$ . Las ecuaciones implícitas de  $S$  y  $T$  son

$$S \equiv \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -\alpha + \beta \\ x_4 = 2\alpha \end{cases} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$T \equiv \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha - \beta \\ x_4 = -\alpha + 3\beta \end{cases} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

y las ecuaciones y base de  $S \cap T$  son

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \implies B_{S \cap T} = \{(1, 1, 0, 2)\}$$

## 2.27 Subespacios suplementarios

Dos subespacios  $S$  y  $T$  de un espacio vectorial  $V$  se llaman **suplementarios** si  $V = S \oplus T$ .

Si  $S \oplus T = U \subsetneq V$ , se dice que  $S$  y  $T$  son suplementarios en  $U$ .

Si  $V = S \oplus T$ , entonces  $\dim V = \dim S + \dim T$ . Además,

$$\begin{cases} \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \text{ base de } S \\ \{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\} \text{ base de } T \end{cases} \implies \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\} \text{ base de } V$$

y también:

$$\begin{cases} \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \text{ base de } S \\ \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\} \text{ base de } V \end{cases} \implies L(\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}) \text{ es suplementario de } S$$

### 3 Geometría afín

#### 3.1 Variedad o subespacio afín

Se llama **variedad afín** o **subespacio afín** de un espacio vectorial  $V$  a cualquier conjunto de la forma

$$\mathbf{u} + S = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in S\} \subset V$$

con  $\mathbf{u} \in V$  y  $S$  un subespacio vectorial de  $V$ , que se llama **subespacio de direcciones**.

Si  $S = L(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\})$ , entonces

$$\mathbf{u} + S = \left\{ \mathbf{u} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{v}_i : \alpha_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq m \right\} \subset V$$

Se llama **dimensión del subespacio afín**  $\mathbf{u} + S$  a la dimensión del subespacio vectorial asociado  $S$ :

$$\dim(\mathbf{u} + S) = \dim S$$

#### 3.2 Observaciones

1.  $\mathbf{u} \in \mathbf{u} + S$
2.  $\mathbf{0} \in \mathbf{u} + S \iff \mathbf{u} \in S \iff \mathbf{u} + S = S$
3. Si  $V = \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\mathbf{u} + S \text{ es } \begin{cases} \text{un punto} & , \text{ si } \dim S = 0 \\ \text{una recta} & , \text{ si } \dim S = 1 \\ \text{un plano} & , \text{ si } 2 \leq \dim S < n - 1 \\ \text{un hiperplano} & , \text{ si } \dim S = n - 1 \\ \text{el espacio } V = \mathbb{R}^n & , \text{ si } \dim S = n \end{cases}$$

#### 3.3 Ejemplos

1. En  $\mathbb{R}^3$ , la recta que pasa por  $P(1, -1, 0)$  con vector de dirección  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$  es:

$$\overrightarrow{OP} + L(\{\mathbf{v}\}) = \{(x, y, z) = (1, -1, 0) + \alpha(1, 1, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

cuyas ecuaciones paramétricas e implícitas son:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

2. En  $\mathbb{R}^3$ , la recta que pasa por  $P(0, 1, 1)$  y  $Q(1, 0, 1)$  es:

$$\overrightarrow{OP} + L(\{\overrightarrow{PQ}\}) = \{(x, y, z) = (0, 1, 1) + \alpha(1, -1, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

cuyas ecuaciones paramétricas e implícitas son:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = 1 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$



3. En  $\mathbb{R}^3$ , el plano que pasa por  $P(1, 0, 0)$  con vectores de dirección  $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$  y  $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$  es:

$$\overrightarrow{OP} + L(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}) = \{(x, y, z) = (1, 0, 0) + \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 0, 1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

cuyas ecuaciones paramétricas e implícitas son:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies x - y = 1$$

4. En  $\mathbb{R}^4$ , el hiperplano que pasa por  $P_1(1, 0, 0, 0)$ ,  $P_2(0, 1, 0, 0)$ ,  $P_3(0, 0, 1, 0)$  y  $P_4(0, 0, 0, 1)$  es:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_1} + L(\{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\}) = \\ = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 0, 0) + \alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(-1, 0, 1, 0) + \gamma(-1, 0, 0, 1) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

cuyas ecuaciones paramétricas e implícitas son:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \alpha - \beta - \gamma \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \gamma \end{cases} ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \implies x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

### 3.4 Igualdad de variedades afines

Sean  $V$  un espacio vectorial,  $S$  y  $T$  subespacios vectoriales de  $V$ , y  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ . Entonces

$$\mathbf{u} + S = \mathbf{v} + T \iff \begin{cases} S = T \\ \mathbf{u} - \mathbf{v} \in S \cap T \end{cases}$$

#### **Demostración:**

( $\Leftarrow$ ) Puesto que  $S = T$  y  $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in T$ :

$$\mathbf{u} + S = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} + T = \mathbf{v} + T$$

( $\Rightarrow$ )

$$\mathbf{u} + S = \mathbf{v} + T \implies \begin{cases} \mathbf{u} \in \mathbf{v} + T \implies \mathbf{u} - \mathbf{v} \in T \\ \mathbf{v} \in \mathbf{u} + S \implies \mathbf{v} - \mathbf{u} \in S \implies \mathbf{u} - \mathbf{v} \in S \end{cases} \implies \mathbf{u} - \mathbf{v} \in S \cap T$$

y además

$$S = -\mathbf{u} + \mathbf{u} + S = -\mathbf{u} + \mathbf{v} + T = -(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + T = T$$

### 3.5 Ejemplo

Para estudiar la igualdad de las variedades afines

$$A \equiv \begin{cases} x_1 = 1 + \alpha \\ x_2 = -\alpha + \beta \\ x_3 = \beta \\ x_4 = -1 + \beta \end{cases} \quad B \equiv \begin{cases} x_1 = 2 + \alpha + \beta + \gamma \\ x_2 = -\alpha + \gamma \\ x_3 = 1 + \beta + 2\gamma \\ x_4 = \beta + 2\gamma \end{cases} \quad C \equiv \begin{cases} x_1 = -1 + \alpha + \beta \\ x_2 = -\alpha - 2\beta \\ x_3 = -\beta \\ x_4 = -1 - \beta \end{cases}$$

se determina un vector y un subespacio de direcciones de cada una de ellas:

$$\begin{aligned} A = \mathbf{u}_A + S_A \quad \text{con} \quad & \begin{cases} \mathbf{u}_A = (1, 0, 0, -1) \\ S_A = L(\{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\}) \end{cases} \\ B = \mathbf{u}_B + S_B \quad \text{con} \quad & \begin{cases} \mathbf{u}_B = (2, 0, 1, 0) \\ S_B = L(\{(1, -1, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 2, 2)\}) \end{cases} \\ C = \mathbf{u}_C + S_C \quad \text{con} \quad & \begin{cases} \mathbf{u}_C = (-1, 0, 0, -1) \\ S_C = L(\{(1, -1, 0, 0), (1, -2, -1, -1)\}) \end{cases} \end{aligned}$$

En primer lugar se comprueba, hallando la matriz escalonada de la matriz asociada a sus vectores de dirección, si coinciden los subespacios vectoriales asociados:

$$\begin{aligned} S_A &\equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ S_B &\equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ S_C &\equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego  $S = S_A = S_B = S_C = L(\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 1)\})$  y las tres variedades afines verifican la primera condición. Para verificar la segunda se comprueba, mediante operaciones elementales, si las diferencias entre cada dos vectores de los que definen las variedades pertenecen al subespacio vectorial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_A - \mathbf{u}_C \\ \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_C \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

de donde  $\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B \in S$ ,  $\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_C \notin S$  y  $\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_C \notin S$ . Luego  $A = B \neq C$ .

### 3.6 Posición relativa de variedades afines

Sean  $\mathbf{u} + S$  y  $\mathbf{v} + T$  dos variedades afines en un espacio vectorial  $V$ . Entonces, si

- $\mathbf{u} + S \cap \mathbf{v} + T = \begin{cases} \mathbf{u} + S, \text{ se dice que } \mathbf{u} + S \text{ está } \mathbf{contenida} \text{ en } \mathbf{v} + T. \\ \mathbf{v} + T, \text{ se dice que } \mathbf{v} + T \text{ está } \mathbf{contenida} \text{ en } \mathbf{u} + S. \end{cases}$
- $(\mathbf{u} + S) \cap (\mathbf{v} + T) = \emptyset$ , y  $S \subset T$  o  $T \subset S$ , se dice que  $\mathbf{u} + S$  y  $\mathbf{v} + T$  son **paralelas**.
- $(\mathbf{u} + S) \cap (\mathbf{v} + T) = \emptyset$ , y  $S \not\subset T$  y  $T \not\subset S$ , se dice que  $\mathbf{u} + S$  y  $\mathbf{v} + T$  se **cruzan**.
- $(\mathbf{u} + S) \cap (\mathbf{v} + T) \neq \begin{cases} \emptyset \\ \mathbf{u} + S \\ \mathbf{v} + T \end{cases}$ , se dice que  $\mathbf{u} + S$  y  $\mathbf{v} + T$  se **cortan**.

### 3.7 Posiciones relativas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1. Sean  $r \equiv \mathbf{u}_r + L(\{\mathbf{v}_r\})$  y  $s \equiv \mathbf{u}_s + L(\{\mathbf{v}_s\})$  dos rectas del plano  $\mathbb{R}^2$ . Entonces si

$\text{rg}(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_s)$	$\text{rg}(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_s, \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_s)$	Posición relativa de $r$ y $s$
1	1	iguales
1	2	paralelas
2	2	se cortan en un punto

2. Sean  $r \equiv \mathbf{u}_r + L(\{\mathbf{v}_r\})$  y  $s \equiv \mathbf{u}_s + L(\{\mathbf{v}_s\})$  dos rectas del espacio  $\mathbb{R}^3$ . Entonces si

$\text{rg}(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_s)$	$\text{rg}(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_s, \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_s)$	Posición relativa de $r$ y $s$
1	1	iguales
1	2	paralelas
2	2	se cortan en un punto
2	3	se cruzan

3. Sean  $r \equiv \mathbf{u}_r + L(\{\mathbf{v}_r\})$  y  $\pi \equiv \mathbf{u}_\pi + L(\{\mathbf{v}_\pi, \mathbf{w}_\pi\})$  una recta y un plano del espacio  $\mathbb{R}^3$ . Entonces si

$\text{rg}(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_\pi, \mathbf{w}_\pi)$	$\text{rg}(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_\pi, \mathbf{w}_\pi, \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_\pi)$	Posición relativa de $r$ y $\pi$
2	2	la recta está contenida en el plano
2	3	paralelos
3	3	se cortan en un punto

4. Sean  $\pi \equiv \mathbf{u}_\pi + L(\{\mathbf{v}_\pi, \mathbf{w}_\pi\})$  y  $\sigma \equiv \mathbf{u}_\sigma + L(\{\mathbf{v}_\sigma, \mathbf{w}_\sigma\})$  dos planos del espacio  $\mathbb{R}^3$ . Entonces si

$\text{rg}(\mathbf{v}_\pi, \mathbf{w}_\pi, \mathbf{v}_\sigma, \mathbf{w}_\sigma)$	$\text{rg}(\mathbf{v}_\pi, \mathbf{w}_\pi, \mathbf{v}_\sigma, \mathbf{w}_\sigma, \mathbf{u}_\pi - \mathbf{u}_\sigma)$	Posición relativa de $\pi$ y $\sigma$
2	2	iguales
2	3	paralelos
3	3	se cortan en una recta

### 3.8 Ejemplos

1. En  $\mathbb{R}^2$ , las rectas

$$r_1 \equiv x - y = -1 \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = \alpha + 3 \end{cases} \quad r_3 \equiv \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = 3\alpha - 2 \end{cases}$$

verifican:  $r_1 \parallel r_2$ ,  $r_1 \cap r_3 = \{(0, 1)\}$ , y  $r_2 \cap r_3 = \{(3/2, 11/2)\}$ .

2. En  $\mathbb{R}^3$ , la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$  corta al plano  $\pi_1 \equiv y - z = 1$  en un punto y está contenida en el plano  $\pi_2 \equiv y + z = 1$ . Los planos se cortan en una recta. Más concretamente:

$$r \cap \pi_1 = \{(0, 1, 0)\} \quad \text{y} \quad \pi_1 \cap \pi_2 \equiv \begin{cases} y - z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \alpha \in \mathbb{R}$$

3. En  $\mathbb{R}^3$ , las rectas

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \equiv (0, 0, 1) + L(\{(1, 1, -1)\}) \\ r_2 &\equiv \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases} \equiv (1, 1, 0) + L(\{(2, 0, 1)\}) \\ r_3 &\equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 4 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \equiv (1, 1, 3) + L(\{(1, 1, -1)\}) \end{aligned}$$

verifican:  $r_1 \cap r_2 = \{(1, 1, 0)\}$ ,  $r_1$  y  $r_3$  son paralelas, y  $r_2$  y  $r_3$  se cruzan.

4. En  $\mathbb{R}^4$ , el hiperplano  $H \equiv x_1 - x_4 = -1$  y el plano  $\pi \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$  se cortan en la recta

$$H \cap \pi \equiv \begin{cases} x_1 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x_1 = -1 + \alpha \\ x_2 = -3 + 2\alpha \\ x_3 = 3\alpha \\ x_4 = \alpha \end{cases} \equiv (-1, -3, 0, 0) + L(\{(1, 2, 3, 1)\})$$

5. En  $\mathbb{R}^4$ , los planos  $\pi_1 \equiv \begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_4 = -1 \end{cases}$  y  $\pi_2 \equiv \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$  se cruzan, pues su intersección es vacía y ninguno de los subespacios de direcciones,  $L(\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0)\})$  de  $\pi_1$  y  $L(\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, -1, -1)\})$  de  $\pi_2$ , está contenido en el otro.

6. En  $\mathbb{R}^4$ , los planos  $\pi_1 \equiv \begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_4 = -1 \end{cases}$  y  $\pi_2 \equiv \begin{cases} x_1 - x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$  son paralelos, pues su intersección es vacía y sus subespacios de direcciones coinciden.

## 4 Aplicaciones lineales

### 4.1 Aplicación lineal

Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo  $\mathbb{K}$  (en general,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ). Una aplicación  $f : V \longrightarrow W$  se llama **aplicación lineal** u **homomorfismo** si

- $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$
- $f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$

Estas dos condiciones son equivalentes a la única condición:

$$f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

### 4.2 Ejemplos

1. Las siguientes aplicaciones,  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , son aplicaciones lineales:

- (a) Homotecia:  $f(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (b) Proyección:  $f(x, y) = (x, 0)$ .
- (c) Simetría:  $f(x, y) = (x, -y)$

2. Si  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , la aplicación  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  definida por  $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$  es una aplicación lineal (asociada a la matriz  $A$ ). Obviamente, para que tenga sentido el producto  $A\mathbf{u}$ , se entiende que el vector  $\mathbf{u}$  se escribe en columna, como se hará siempre que esté implicado en operaciones matriciales.

3. La aplicación lineal asociada a la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  es  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x \\ -x + 2y \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x \\ z' = -x + 2y \end{cases}$$

### 4.3 Propiedades

Si  $f : V \longrightarrow W$  es una aplicación lineal, se cumple:

1.  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$
2.  $f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u}).$
3.  $S$  subespacio vectorial de  $V \implies f(S)$  es subespacio vectorial de  $W$ .
4.  $T$  subespacio vectorial de  $W \implies f^{-1}(T)$  es subespacio vectorial de  $V$ .

### 4.4 Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Si  $f : V \longrightarrow W$  es una aplicación lineal, se llama **imagen** al subespacio vectorial  $\text{Im } f = f(V)$ , y **núcleo** al subespacio vectorial  $\text{Ker } f = f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ .

## 4.5 Definiciones

Una aplicación lineal (homomorfismo) se llama **monomorfismo** si es inyectiva, **epimorfismo** si es sobreyectiva, e **isomorfismo** si es biyectiva. Cuando los espacios inicial y final coinciden, la aplicación lineal y el isomorfismo se suelen llamar **endomorfismo** y **automorfismo**, respectivamente.

## 4.6 Condición necesaria y suficiente de monomorfismo

Sea  $f : V \longrightarrow W$  es una aplicación lineal. Entonces

$$f \text{ es monomorfismo} \iff \text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$$

**Demostración:**

( $\Rightarrow$ ) Si  $f$  es inyectiva, entonces:

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \implies f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{0}) \implies \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

luego  $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Inversamente, si  $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$ , entonces

$$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) \implies f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

luego  $f$  es inyectiva.

## 4.7 Dimensión del subespacio imagen

Sea  $f : V \longrightarrow W$  es una aplicación lineal. Si  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base de  $V$ , entonces

$$\text{Im } f = L(\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}) \text{ y, en consecuencia } \dim \text{Im } f \leq \dim V$$

**Demostración:** Si  $\mathbf{w} \in \text{Im } f$ , existe  $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B \in V$  tal que

$$\mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(\mathbf{v}_i)$$

luego  $\mathbf{w} \in L(\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\})$ . Inversamente, si  $\mathbf{w} \in L(\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\})$ , entonces

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i\right) \text{ y } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \in V$$

luego  $\mathbf{w} \in \text{Im } f$ .

## 4.8 Determinación de una aplicación lineal

Si  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base de  $V$  y  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$  son  $n$  vectores cualesquiera de  $W$ , entonces existe una única aplicación lineal  $f : V \longrightarrow W$  tal que

$$f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i, \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

**Demostración:** Para cada  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i \in V$  se define

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{w}_i$$

Es fácil ver que  $f$  es aplicación lineal y que  $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Además es única, pues si  $g : V \longrightarrow W$  verifica la misma condición, entonces

$$g(\mathbf{v}) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i g(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{w}_i = f(\mathbf{v})$$

## 4.9 Observaciones

Si  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  viene definida por  $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , entonces

- $\text{Ker } f$  son las soluciones del sistema homogéneo  $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- Si  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\text{Im } f = L(\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)\}) = L(\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\})$$

donde  $\mathbf{c}_i$  es la columna  $i$ -ésima de la matriz  $A$ .

## 4.10 Ejemplo

Si  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es la aplicación lineal asociada a la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= L(\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}) = L(\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}) \\ \text{Ker } f &= \{\mathbf{u} : A\mathbf{u} = \mathbf{0}\} = L(\{(1, 0, -1)\}) \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

## 4.11 Matriz de una aplicación lineal

Como se ha visto, una aplicación lineal  $f : V \longrightarrow W$  queda unívocamente determinada por las imágenes de los elementos de una base  $B_V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  de  $V$ . Si  $B_W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$  es una base de  $W$ , y

$$f(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{w}_i, \quad 1 \leq j \leq n$$

entonces la imagen de cualquier  $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{B_V} \in V$ , expresada en la base  $B_W$  de  $W$ , es

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= f\left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) \mathbf{w}_i \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\mathbf{u} \end{aligned}$$

donde las columnas de la matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , llamada **matriz de la aplicación** respecto de las bases  $B_V$  y  $B_W$ , son las coordenadas en la base  $B_W$  de las imágenes de los vectores de la base  $B_V$ . Se suele indicar  $A = M(f, B_V, B_W)$ .

Fijadas las bases  $B_V$  y  $B_W$ , a cada aplicación lineal le corresponde una matriz y viceversa.

En el caso particular de que  $V = W$  y que la base  $B$  en ambos es la misma, se indica simplemente  $A = M(f, B)$ .

#### 4.12 Ejemplo

La expresión matricial de la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  definida, respecto de las bases canónicas, por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

es

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Para hallar el núcleo, se resuelve el sistema:

$$f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \mathbf{0} \implies \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -\alpha - \beta \\ x_4 = -\alpha \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

de donde  $\text{Ker } f = \{(1, 0, -1, -1), (0, 1, -1, 0)\}$ . La imagen es

$$\text{Im } f = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$$

#### 4.13 Dimensiones de la imagen y el núcleo

Si  $f : V \longrightarrow W$  es una aplicación lineal, entonces

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim V$$

**Demostración:** Sean  $\dim V = n$ ,  $\dim(\text{Ker } f) = r \leq n$ , y

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \quad \text{una base del Ker } f \\ B &= \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\} \quad \text{una base de } V \end{aligned}$$

Entonces  $B_2 = \{f(\mathbf{v}_{r+1}), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$  es una base de  $\text{Im } f$ , ya que



- $B_2$  es un sistema de generadores:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in \text{Im } f &\implies \mathbf{w} = f(\mathbf{v}) \text{ con } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i \in V \\ &\implies \mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=r+1}^n x_i f(\mathbf{v}_i) \end{aligned}$$

- $B_2$  es linealmente independiente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=r+1}^n \alpha_i f(\mathbf{v}_i) &= f\left(\sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0} \implies \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \in \text{Ker } f \implies \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^r (-\alpha_i) \mathbf{v}_i \\ &\implies \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \implies \alpha_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n \implies \alpha_i = 0, \quad r+1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim V$ .

#### 4.14 Rango de una aplicación lineal

Si  $A$  es la matriz asociada a una aplicación lineal  $f : V \longrightarrow W$ , respecto de las bases  $B_V$  y  $B_W$ , entonces, puesto que el núcleo es el espacio de soluciones del sistema  $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , se ha de cumplir que

$$\dim(\text{Ker } f) = \dim V - \text{rg } A \implies \dim(\text{Im } f) = \text{rg } A$$

Luego el rango de cualquier matriz asociada a  $f$  (respecto de bases cualesquiera), que se llama **rango de la aplicación lineal**, ha de ser constante e igual a la dimensión de la imagen.

#### 4.15 Proposición

Si  $f : V \longrightarrow W$  es una aplicación lineal con  $\dim V = \dim W = n < \infty$ , entonces

$$f \text{ es isomorfismo} \iff f \text{ es monomorfismo} \iff f \text{ es epimorfismo}$$

**Demostración:**

$$f \text{ es epimorfismo} \iff \dim(\text{Im } f) = \dim W = n \iff \dim(\text{Ker } f) = 0 \iff f \text{ es monomorfismo}$$

#### 4.16 Composición de aplicaciones lineales

Si  $f : U \longrightarrow V$  y  $g : V \longrightarrow W$  son aplicaciones lineales, entonces  $g \circ f : U \longrightarrow W$  es aplicación lineal, y

$$M(g \circ f, B_U, B_W) = M(g, B_V, B_W) \cdot M(f, B_U, B_V)$$

**Demostración:** Sean  $A = M(g \circ f, B_U, B_W)$ ,  $B = M(g, B_V, B_W)$  y  $C = M(f, B_U, B_V)$ . Entonces

$$(g \circ f)(\mathbf{u}_{B_U}) = g(f(\mathbf{u}_{B_U})) = g((C\mathbf{u})_{B_V}) = (BC\mathbf{u})_{B_W} \implies A = BC$$

#### 4.17 Ejemplo

Si  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  y  $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  vienen definidas por

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

respecto de las bases canónicas, entonces  $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  y  $f \circ g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  vienen definidas por

$$\begin{aligned} g \circ f(x, y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix} \\ f \circ g(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ -y \\ -x + y - z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

respecto de las bases canónicas.

#### 4.18 Matriz de un cambio de base

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y sean

$$B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \quad \text{y} \quad B' = \{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n\}$$

dos bases de  $V$ . La aplicación que hace corresponder a cada vector  $\mathbf{u} \in V$  en la base  $B$  el mismo vector expresado en la base  $B'$  es la aplicación identidad:

$$\begin{aligned} Id : V^B &\longrightarrow V^{B'} \\ \mathbf{u}_B &\longrightarrow \mathbf{u}_{B'} = A\mathbf{u}_B \end{aligned}$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  es la matriz cuya columna  $i$ -ésima es la imagen de  $\mathbf{v}_i$ , es decir las coordenadas de  $\mathbf{v}_i$  en la base  $B'$ .

Puesto que esta aplicación es un isomorfismo,  $\text{rg } A = n$  y la matriz  $A$  es regular. Su inversa  $A^{-1}$  es la que pasa de las coordenadas respecto de  $B'$  a las coordenadas respecto de  $B$ . Resumiendo:

$$\begin{aligned} A &= M(Id, B, B') = ((\mathbf{v}_1)_{B'}, \dots, (\mathbf{v}_n)_{B'}) \quad \text{y} \quad A\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_{B'} \\ A^{-1} &= M(Id, B', B) = ((\mathbf{v}'_1)_B, \dots, (\mathbf{v}'_n)_B) \quad \text{y} \quad A^{-1}\mathbf{u}_{B'} = \mathbf{u}_B \end{aligned}$$

#### 4.19 Ejemplo

Si en  $\mathbb{R}^3$  se considera la base canónica  $B_c = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  y la base

$$B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)\}$$

entonces

$$A = M(Id, B, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_{B_c} = A\mathbf{u}_B$$

De esta manera, si  $\mathbf{u} = (3, 2, -1)_B$ , entonces

$$\mathbf{u}_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es decir  $\mathbf{u} = (2, 1, 1)_{B_c} = (2, 1, 1)$ . Además:

$$A^{-1} = M(\text{Id}, B_c, B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_B = A^{-1} \mathbf{u}_{B_c}$$

de donde  $\mathbf{e}_1 = (2, 1, -1)_B$ ,  $\mathbf{e}_2 = (1, -1, 1)_B$  y  $\mathbf{e}_3 = (-1, 2, -1)_B$ .

## 4.20 Cambios de base en una aplicación lineal

Sea  $f : V \longrightarrow W$  una aplicación lineal cuya matriz, respecto de las bases  $B_V$  en  $V$  y  $B_W$  en  $W$ , es  $A$ . ¿Cuál es la matriz de  $f$  respecto de nuevas bases  $B'_V$  en  $V$  y  $B'_W$  en  $W$ ?

Sean  $P = M(\text{Id}_V, B'_V, B_V)$  y  $Q = M(\text{Id}_W, B'_W, B_W)$  las matrices del cambio de base en  $V$  y  $W$ , respectivamente. Observando el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V^{B_V} & \xrightarrow{A} & W^{B_W} \\ \uparrow P & & \downarrow Q^{-1} \\ V^{B'_V} & \xrightarrow{C} & W^{B'_W} \end{array}$$

se deduce que

$$C = M(f, B'_V, B'_W) = Q^{-1}AP$$

## 4.21 Ejemplo

Sea  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación lineal que respecto de la base canónica  $B_c$  tiene asociada la matriz

$$A = M(f, B_c, B_c) = M(f, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{es decir} \quad f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. ¿Cuál es la matriz de  $f$  respecto de la base

$$B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)\} ?$$

Se construye el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3)^{B_c} & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3)^{B_c} \\ \uparrow P & & \downarrow P^{-1} \\ (\mathbb{R}^3)^B & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3)^B \end{array} \quad \text{donde} \quad P = M(\text{Id}, B, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

y entonces

$$C = M(f, B, B) = M(f, B) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

es decir, que si  $\mathbf{u} = (x, y, z)_B$  entonces su imagen, también expresada en la base  $B$ , es

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. ¿Cuál es la matriz de  $f$  respecto de la base  $B$  en el espacio inicial y la base canónica en el espacio final? Siendo  $I$  la matriz identidad, el nuevo diagrama, y la matriz buscada, son

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3)^{B_c} & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3)^{B_c} \\ \uparrow P & & \downarrow I \\ (\mathbb{R}^3)^B & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3)^{B_c} \end{array} \quad \text{de donde} \quad D = M(f, B, B_c) = IAP = AP = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

## 5 Diagonalización de endomorfismos

### 5.1 Endomorfismo

Se llama **endomorfismo** a una aplicación lineal  $f : V \longrightarrow V$  de un espacio vectorial  $V$  en si mismo.

### 5.2 Cambio de base en un endomorfismo

Sea  $V$  un espacio vectorial y  $f : V \longrightarrow V$  un endomorfismo cuya matriz respecto de la base  $B$  (lo usual, en endomorfismos, es considerar la misma base en los espacios inicial y final) es  $A$ , es decir:

$$f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} \quad \text{donde} \quad A = M(f, B, B) = M(f, B)$$

¿Cuál es la matriz de  $f$  respecto de otra base  $B'$ ? Si  $P = M(\text{Id}, B', B)$  es la matriz del cambio de base de  $B'$  a  $B$ , es decir la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de  $B'$  en la base  $B$ , entonces

$$\begin{array}{ccc} V^B & \xrightarrow{A} & V^B \\ \uparrow P & & \downarrow P^{-1} \\ V^{B'} & \xrightarrow{C} & V^{B'} \end{array} \quad \text{de donde} \quad C = M(f, B') = P^{-1}AP$$

y  $f(\mathbf{u}) = C\mathbf{u}$  respecto de la base  $B'$ .

### 5.3 Endomorfismo o matriz diagonalizable

Un **endomorfismo**  $f$  sobre un espacio vectorial real  $V$  es **diagonalizable** si existe una base  $B^*$  respecto de la cuál su matriz  $D = M(f, B^*)$  es diagonal, es decir si existe  $B^* = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  y  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$  tales que  $f(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Identificando el endomorfismo con su matriz real asociada, una **matriz** cuadrada  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  se dice **diagonalizable** si existe una matriz regular  $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  tal que  $D = P^{-1}AP$  es diagonal.

**Nota:** Aunque aquí sólo se consideran espacios vectoriales y matrices reales, con lo que se obtienen diagonalizaciones reales, todo lo que se diga es igualmente cierto para otro cuerpo  $\mathbb{K}$ , con lo que se obtienen diagonalizaciones en  $\mathbb{K}$ .

### 5.4 Autovalores y autovectores

Sea  $A$  la matriz asociada a un endomorfismo  $f$  sobre el espacio vectorial real  $V$  de dimensión  $n$ . Se dice que  $\lambda \in \mathbb{R}$  es **autovalor** si existe un vector  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , que se llamará **autovector**, tal que  $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . Puesto que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \iff (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

que es un sistema homogéneo, la existencia del vector no nulo (solución no nula del sistema homogéneo) viene garantizada si

$$\text{rg}(A - \lambda I) < n \quad \text{lo que equivale a que} \quad |A - \lambda I| = 0$$

Por lo tanto, los autovalores de la matriz  $A$  (o endomorfismo asociado) son las raíces reales del **polinomio característico**  $P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$ , y los autovectores asociados son los vectores no nulos del núcleo de la aplicación asociada a la matriz  $A - \lambda I$ .

Se llama **espectro** de  $A$ , que se representa por  $\sigma(A)$ , al conjunto de todos sus autovalores, y **subespacio propio** asociado al autovalor  $\lambda$  a todos sus autovectores asociados más el vector nulo, es decir a

$$S(\lambda) = \{\mathbf{v} : (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}\} = \text{Ker}(A - \lambda I)$$

## 5.5 Ejemplo

Sea  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  el endomorfismo asociado a la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , respecto de la base canónica. El polinomio característico, y sus raíces, son

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -4 & 2 - \lambda & 2 \\ -2 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1) = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 1, \text{ con } m(1) = 1 \\ \lambda = 2, \text{ con } m(2) = 2 \end{cases}$$

donde  $m(\lambda)$  indica la multiplicidad del autovalor  $\lambda$ . El espectro es  $\sigma(A) = \{1, 2\}$ .

Los subespacios propios asociados a estos autovalores son:

$$\begin{aligned} S(1) &= \text{Ker}(A - I) = \left\{ \mathbf{v} : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\} = \left\{ \mathbf{v} : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \right\} = L(\{(1, 2, 1)\}) \\ S(2) &= \text{Ker}(A - 2I) = \left\{ \mathbf{v} : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\} = \{\mathbf{v} : 2x - z = 0\} \\ &= L(\{(1, 0, 2), (0, 1, 0)\}) \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que los autovectores  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1) \in S(1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2) \in S(2)$ , y  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0) \in S(2)$  forman base. Puesto que  $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$ ,  $f(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_2$  y  $f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_3$ , la matriz respecto de esta base  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  es

$$D = M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es diagonal, luego el endomorfismo  $f$  y la matriz  $A$  son diagonalizables. Para relacionar las matrices  $A$  y  $D$  se recurre al diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3)^{B_c} & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3)^{B_c} \\ \uparrow P & & \downarrow P^{-1} \\ (\mathbb{R}^3)^B & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3)^B \end{array} \quad \text{donde } P = M(\text{Id}, B, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar la relación  $D = P^{-1}AP$ .

Es inmediato de las definiciones la siguiente caracterización:

## 5.6 Caracterización de endomorfismo diagonalizable

Un endomorfismo  $f$  sobre un espacio vectorial real  $V$ , de dimensión  $n$ , es diagonalizable si y sólo si existen  $n$  autovalores reales (algunos de ellos pueden ser iguales) y una base formada por autovectores.

## 5.7 Independencia de autovectores asociados a distintos autovalores

Autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.

**Demostración:** Sea  $f$  un endomorfismo sobre  $V$ , y  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  autovectores asociados, respectivamente, a los autovalores  $\lambda$  y  $\mu$ ,  $\lambda \neq \mu$ . Entonces

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{0} &\implies \begin{cases} f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \\ \lambda(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \mathbf{0} \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha\lambda\mathbf{u} + \beta\mu\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \alpha\lambda\mathbf{u} + \beta\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \implies \\ &\implies \beta(\lambda - \mu)\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \beta = 0 \implies \alpha = 0 \end{aligned}$$

Luego  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son linealmente independientes.

## 5.8 Algoritmo de diagonalización

Sea  $f$  el endomorfismo sobre  $V$  asociado a la matriz  $A$ . El algoritmo que hay que seguir para diagonalizar es:

- Se resuelve la ecuación  $P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$ . Si alguna de sus raíces no es real, el endomorfismo no es diagonalizable.
- Para cada autovalor  $\lambda \in \sigma(A)$  se halla su subespacio propio  $S(\lambda) = \text{Ker}(A - \lambda I)$ , comprobando que

$$\dim S(\lambda) = m(\lambda) \quad (\text{multiplicidad de } \lambda)$$

Si algún autovalor no verifica lo anterior, el endomorfismo no es diagonalizable.

- La base respecto de la que el endomorfismo es diagonal es la formada por la unión de todas las bases de los subespacios propios, y la matriz diagonal es aquella cuyos elementos son, y en el mismo orden, los autovalores asociados a cada autovector de la base.

## 5.9 Propiedades

1. El polinomio característico de un endomorfismo, respecto de cualquier base, es siempre el mismo.

**Demostración:** Si  $A$  y  $C$  son las matrices de un endomorfismo  $f$  respecto de dos bases distintas, están relacionadas por la matriz del cambio de base por una relación del tipo  $C = P^{-1}AP$ . Entonces:

$$|C - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}| \cdot |A - \lambda I| \cdot |P| = |A - \lambda I|$$

pues  $|P^{-1}| = |P|^{-1}$ .

2. La suma de todos los autovalores de una matriz, contando cada uno de ellos tantas veces como indica su multiplicidad, es igual a su traza.

**Demostración:** Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  los  $n$  autovalores de una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})$  de

dimensión  $n$ . Puesto que los autovalores son las raíces del polinomio característico, se tiene que

$$|A - \lambda I| = (a_{11} - \lambda) \cdot \dots \cdot (a_{nn} - \lambda) + P_{n-2}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

donde  $P_{n-2}(\lambda)$  es un polinomio de grado menor o igual que  $n - 2$  en  $\lambda$ . Igualando los coeficientes de grado  $n - 1$ , en cada una de las dos expresiones anteriores, se obtiene:

$$(-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn}) = (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

de donde

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = a_{11} + \dots + a_{nn} = \text{traza}(A)$$

3. El producto de todos los autovalores de una matriz, contando cada uno de ellos tantas veces como indica su multiplicidad, es igual a su determinante.

**Demostración:** Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  los  $n$  autovalores de una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})$  de dimensión  $n$ . Entonces

$$|A - \lambda I| = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

Haciendo  $\lambda = 0$  en la expresión anterior, se obtiene:

$$|A| = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

## 5.10 Consecuencias inmediatas de las propiedades anteriores

- Los autovalores de un endomorfismo son los mismos respecto de cualquier base.
- Cualquier matriz de un endomorfismo, respecto de cualquier base, tiene la misma traza y el mismo determinante.
- Una matriz es singular si y sólo si  $\lambda = 0$  es autovalor.



## 6 Espacios euclídeos

### 6.1 Producto escalar. Espacio euclídeo

Se llama **producto escalar** sobre un espacio vectorial real  $V$  a cualquier aplicación

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\longrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

que verifica las siguientes propiedades:

- Conmutativa:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ ,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ .
- Bilineal:  $\begin{cases} \langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \\ \langle \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \mu \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle \end{cases}$ ,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ,  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- Definida positiva:  $\begin{cases} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in V \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{cases}$

Un espacio vectorial con un producto escalar definido sobre él se llama **espacio euclídeo**.

### 6.2 Ejemplos

1. Si  $\mathbf{u} = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\mathbf{v} = (y_1, \dots, y_n)$  son dos vectores de  $\mathbb{R}^n$  en la base canónica, el producto

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

es un producto escalar, que se llama **producto usual** y se representa, simplemente, por  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ .

2. En  $\mathbb{R}^2$ , es un producto escalar:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = (x_1 \quad y_1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ya que es:

- Conmutativo:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^t = \left[ \mathbf{u}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v} \right]^t = \mathbf{v}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{u} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ .
- Bilineal:  $\langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} \rangle = \mathbf{u}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ , y por la propiedad conmutativa se verifica también en la primera variable.
- Definido positivo: Si  $\mathbf{u} = (x, y)$ ,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = (x + y)^2 + y^2 \geq 0$ , y es cero sólo si  $x = y = 0$ .

Por el contrario, la aplicación:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}$$

no es un producto escalar. Es bilineal y conmutativo pero no es definido positivo pues, por ejemplo,  $\langle (0, 1), (0, 1) \rangle = -1 < 0$ .

3. En  $\mathbb{R}^n$  la aplicación definida por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t A \mathbf{v}$$

con  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  simétrica ( $A = A^t$ ) es siempre conmutativo y bilineal, por lo que será un producto escalar si es definido positivo.

### 6.3 Matriz de Gram de un producto escalar

Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión  $n$ ,  $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  una base, y  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  un producto escalar sobre  $V$ . Entonces, si  $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B$  y  $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_B$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \left\langle \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \left( \sum_{j=1}^n y_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \right) \\ &= (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n y_j \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_j \rangle \\ \sum_{j=1}^n y_j \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_j \rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n y_j \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_j \rangle \end{pmatrix} \\ &= (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t G \mathbf{v} \quad \text{con} \quad G = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle \end{pmatrix}$$

que se llama **matriz de Gram** del producto escalar respecto de la base  $B$ .

### 6.4 Ejemplo

En  $\mathbb{R}^n$ , la matriz de Gram del producto escalar usual, respecto de la base canónica, es la matriz identidad:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \mathbf{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} \right\} \implies \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

### 6.5 Matrices de Gram respecto de bases distintas

Sea  $V$  un espacio vectorial euclídeo, y sean  $G$  y  $G'$  las matrices de Gram de su producto escalar respecto de las bases  $B$  y  $B'$ , respectivamente, es decir:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}_B^t G \mathbf{v}_B = \mathbf{u}_{B'}^t G' \mathbf{v}_{B'}$$

Si  $P = M(B', B)$  es la matriz del cambio de base de  $B'$  a  $B$ , entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}_B = P\mathbf{u}_{B'} \\ \mathbf{v}_B = P\mathbf{v}_{B'} \end{array} \right\} \implies \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}_B^t G \mathbf{v}_B = (\mathbf{u}_{B'}^t P^t) G (P \mathbf{v}_{B'}) = \mathbf{u}_{B'}^t (P^t G P) \mathbf{v}_{B'} = \mathbf{u}_{B'}^t G' \mathbf{v}_{B'}$$

Luego  $G' = P^t G P$ .

## 6.6 Propiedades de la matriz de Gram

Si  $G = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  es la matriz de Gram de un producto escalar, entonces

- $G$  es simétrica ( $G = G^t$ ), y
- $a_{ii} > 0$ , para  $1 \leq i \leq n$ ,

por las propiedades conmutativa y definida positiva, respectivamente.

## 6.7 Normas, ángulos y distancias

Sea  $V$  un espacio euclídeo, y sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  su producto escalar. Se llama **norma**, o **longitud**, del vector  $\mathbf{u} \in V$  a

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

Se llama **ángulo** que forman los vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  a

$$(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \arccos \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}, \quad \text{con } 0 \leq (\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) \leq 180^\circ,$$

que está bien definido, pues

$$\|\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 \lambda^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \lambda + \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$$

para cualesquiera  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ , y si la ecuación que se ha obtenido, de segundo grado en  $\lambda$ , es siempre mayor o igual que cero, entonces su discriminante será menor o igual que cero:

$$\Delta = 4 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 - 4 \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \leq 0 \implies \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$$

de donde se obtiene que:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \quad (\text{desigualdad de Schwarz})$$

La **distancia** entre los vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  se define como  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ .

## 6.8 Ejemplo

La norma usual de  $\mathbb{R}^n$ , inducida por el producto usual, de  $\mathbf{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  es

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

y el ángulo que forman  $\mathbf{u} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{v} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  es

$$(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \arccos \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}$$

que está bien definido, pues

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \quad (\text{desigualdad de Schwarz})$$

La distancia entre  $\mathbf{u} = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\mathbf{v} = (y_1, \dots, y_n)$  es

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

## 6.9 Vector unitario, vector normalizado y vectores ortogonales

Sea  $V$  un espacio euclídeo, y sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  su producto escalar. Se llama **vector unitario** a cualquier vector de norma uno. Si  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  entonces  $\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$  es un vector unitario:

$$\left\| \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right\| = \langle \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \rangle^{1/2} = \left( \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \right)^{1/2} = \left( \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \right)^{1/2} = 1$$

que se llama **vector normalizado** de  $\mathbf{u}$ .

Dos **vectores** no nulos  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  se llaman **ortogonales** si  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ , es decir si  $(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{v}}) = 90^\circ$ .

## 6.10 Ejemplos

1. Sean  $\mathbf{u} = (1, 2)$  y  $\mathbf{v} = (3, 4)$  vectores de  $\mathbb{R}^2$ , con el producto usual. Puesto que  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{5}$  y  $\|\mathbf{v}\| = 5$ , ninguno de ellos es unitario, siendo  $\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$  el vector normalizado de  $\mathbf{u}$ . Además no son ortogonales, pues  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 11$ , siendo  $(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{v}}) = \arccos \frac{11}{5\sqrt{5}}$ .
2. En  $\mathbb{R}^4$  con el producto usual, los vectores normalizados de los siguientes son los que se indican:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = (1, 0, 1, 0) &\implies \|\mathbf{u}\| = \sqrt{2} \implies \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ \mathbf{v} = (0, 1, 0, 1) &\implies \|\mathbf{v}\| = \sqrt{2} \implies \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \mathbf{w} = (1, 1, 1, -1) &\implies \|\mathbf{w}\| = 2 \implies \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \right) \end{aligned}$$

Los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son ortogonales, pues  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ , mientras que  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{w}$  no lo son, pues  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 2$ , siendo  $(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{w}}) = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$ .

## 6.11 Bases ortogonales y ortonormales

Un **conjunto** de vectores no nulos, de un espacio vectorial euclídeo  $V$ , se llama **ortogonal** si son ortogonales dos a dos. Si además todos son unitarios, el **conjunto** se llama **ortonormal**.

Es decir:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \text{ es ortogonal} &\iff \begin{cases} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0 & , \text{ para } i \neq j \\ \|\mathbf{u}_i\| \neq 0 & , \text{ para } 1 \leq i \leq m \end{cases} \\ \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \text{ es ortonormal} &\iff \begin{cases} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0 & , \text{ para } i \neq j \\ \|\mathbf{u}_i\| = 1 & , \text{ para } 1 \leq i \leq m \end{cases} \end{aligned}$$

Es claro que:

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \text{ ortogonal} \implies \left\{ \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \dots, \frac{\mathbf{u}_m}{\|\mathbf{u}_m\|} \right\} \text{ ortonormal}$$

Una **base ortogonal** es una base formada por un conjunto ortogonal, y una **base ortonormal** es una base formada por un conjunto ortonormal. Es fácil observar que:

- La matriz de Gram de un producto escalar respecto de una base ortogonal es una matriz diagonal.
- La matriz de Gram de un producto escalar respecto de una base ortonormal es la matriz identidad. Por lo tanto:  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t I \mathbf{v} = \mathbf{u}^t \mathbf{v}$ .

## 6.12 Independencia lineal de vectores ortogonales

Todo conjunto ortogonal de vectores es linealmente independiente.

**Demostración:** Sea  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$  un conjunto ortogonal de vectores en el espacio vectorial euclídeo  $V$ . Si  $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{u}_m = \mathbf{0}$ , entonces:

$$0 = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{u}_j \rangle = \sum_{j=1}^m \alpha_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \alpha_i \|\mathbf{u}_i\|^2 \implies \alpha_i = 0$$

para cada  $0 \leq i \leq m$ . Luego  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$  es linealmente independiente.

## 6.13 Ejemplo

En  $\mathbb{R}^3$ , el conjunto de vectores

$$\{\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{u}_2 = (1, -1, 0), \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)\}$$

es linealmente independiente, pues  $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$ , luego forma una base ortogonal. Una base ortonormal es

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = (0, 0, 1) \right\}$$

## 6.14 Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Si  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  son vectores linealmente independientes en el espacio vectorial euclídeo  $V$ , entonces existen vectores  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$  ortogonales tales que

$$L(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\}) = L(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i\}) \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

El método para conseguir este conjunto ortogonal, llamado **proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt**, es el siguiente:

- En primer lugar, se elige  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ .
- Ahora se elige  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \alpha_{21}\mathbf{u}_1$  con la condición de que  $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$ , para lo que se necesita que

$$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle + \alpha_{21} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \implies \alpha_{21} = \frac{-\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1$$

- A continuación se elige  $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \alpha_{31}\mathbf{u}_1 + \alpha_{32}\mathbf{u}_2$  con la condición de que  $\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$ , para lo que se necesita que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle &= \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle + \alpha_{31} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle + 0 = 0 \implies \alpha_{31} = \frac{-\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle &= \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle + 0 + \alpha_{32} \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \implies \alpha_{32} = \frac{-\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2$$

- Y así sucesivamente, se obtiene:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_j \rangle}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \mathbf{u}_j$$

para  $2 \leq k \leq m$ .

Para obtener una base ortonormal, se aplica el proceso de normalización después de aplicar Gram-Schmidt:

$$\text{Base} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} \text{Base ortogonal} \xrightarrow{\text{Normalización}} \text{Base ortonormal}$$

## 6.15 Ejemplo

Sea  $S$  el subespacio de  $\mathbb{R}^4$  generado por el conjunto de vectores

$$B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2, 1)\}$$

que es linealmente independiente (es una base de  $S$ ). Aplicando el proceso de Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 0) \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \frac{0}{2} \mathbf{u}_1 = (1, -1, 1, 1) \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_3 - \frac{-1}{2} \mathbf{u}_1 - \frac{2}{4} \mathbf{u}_2 = \left(-1, 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Una base ortogonal de  $S$  es

$$B_{OTG} = \left\{ \mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (1, -1, 1, 1), \mathbf{u}_3 = \left(-1, 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

y una base ortonormal:

$$B_{OTN} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \right. \\ \left. \mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right) \right\}$$

### 6.16 Coordenadas de un vector respecto de una base ortonormal

Si  $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  es una base ortonormal de un espacio vectorial euclídeo  $V$ , entonces:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i = (\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle)_B$$

### 6.17 Subespacios ortogonales. Complementario ortogonal

Dos subespacios vectoriales  $S$  y  $T$  de un espacio vectorial euclídeo  $V$  se llaman **subespacios ortogonales**, que se indica  $S \perp T$ , si  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ,  $\forall \mathbf{u} \in S$  y  $\forall \mathbf{v} \in T$ . Se llama **complementario ortogonal** de  $S$  al subespacio vectorial

$$S^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{u} \in S\}$$

### 6.18 Ejemplo

En  $\mathbb{R}^4$ , con el producto usual, el complementario ortogonal del subespacio

$$S = L(\{\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0, 1), \mathbf{u}_2 = (1, 1, 1, 0)\})$$

es el subespacio:

$$S^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 : \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{u} \in S\} = \{\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) : \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = 0\} = \\ = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -\alpha - \beta \\ x_4 = -\alpha + \beta \end{array}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \\ = L(\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, -1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 1)\})$$

### 6.19 Teorema

Si  $S$  es un subespacio vectorial del espacio vectorial euclídeo  $V$ , se cumple que

$$V = S \oplus S^\perp$$

Como consecuencia:  $\dim S + \dim S^\perp = \dim V$ .

**Demostración:**

- $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}$ :

$$\mathbf{u} \in S \cap S^\perp \implies \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 = 0 \implies \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

- $S + S^\perp = V$ :

- Si  $S = \{\mathbf{0}\}$ , entonces  $S^\perp = V$  y el resultado es evidente.
- Si  $S \neq \{\mathbf{0}\}$ , se amplía una base ortogonal  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  de  $S$  a una base ortogonal  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$  de  $V$ , y entonces cualquier vector  $\mathbf{u} \in V$  se puede expresar como

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^k x_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=k+1}^n x_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \mathbf{w} \quad \text{con } \mathbf{v} \in S \text{ y } \mathbf{w} \in S^\perp$$

## 6.20 Proyecciones

Si  $S$  un subespacio vectorial del espacio vectorial euclídeo  $V$ , cada vector  $\mathbf{u} \in V$  se descompone de forma única como suma de un vector de  $S$  y otro de  $S^\perp$ , que se llaman, respectivamente, **proyección** de  $\mathbf{u}$  sobre  $S$  y sobre  $S^\perp$ , y se representan:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \quad \text{con } \begin{cases} \mathbf{v} \in S \\ \mathbf{w} \in S^\perp \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{v} = \text{proy}_S \mathbf{u} \\ \mathbf{w} = \text{proy}_{S^\perp} \mathbf{u} \end{cases} \quad \text{y } \mathbf{u} = \text{proy}_S \mathbf{u} + \text{proy}_{S^\perp} \mathbf{u}$$

Se define el **ángulo** que forman un vector  $\mathbf{u} \in V$  con un subespacio  $S$  como el ángulo que forma con su proyección, es decir:

$$(\widehat{\mathbf{u}}, S) = (\mathbf{u}, \widehat{\text{proy}_S \mathbf{u}}) = \arccos \frac{\langle \mathbf{u}, \text{proy}_S \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\text{proy}_S \mathbf{u}\|}$$

y la **distancia** entre ellos como la norma de su proyección sobre  $S^\perp$ , es decir:

$$d(\mathbf{u}, S) = \|\text{proy}_{S^\perp} \mathbf{u}\| = \|\mathbf{u} - \text{proy}_S \mathbf{u}\|$$

## 6.21 Cálculo de la proyección

Sea  $S$  un subespacio vectorial del espacio vectorial euclídeo  $V$ . Para hallar la proyección de un vector  $\mathbf{u} \in V$  sobre  $S$  se puede proceder, según el caso, de cualquiera de las siguientes formas:

- Si  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$  con  $\mathbf{v} \in S$  y  $\mathbf{w} \in S^\perp$ , entonces  $\mathbf{v} = \text{proy}_S \mathbf{u}$ .
- Si  $B = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$  es una base ortonormal de  $S$ , entonces

$$\text{proy}_S \mathbf{u} = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_i \rangle \mathbf{w}_i$$

- Si  $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  es una base arbitraria de  $S$ , se buscan  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  tales que

$$\mathbf{u} - \text{proy}_S \mathbf{u} = \mathbf{u} - \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i \in S^\perp$$



para lo que se debe cumplir que

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u} - \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u} - \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k \rangle = 0 \end{cases}$$

que es un sistema lineal de ecuaciones, cuya solución  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  proporciona la proyección  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i$ .

## 6.22 Ejemplo

En  $\mathbb{R}^4$  con el producto usual, para hallar la proyección de  $\mathbf{u} = (0, 2, 1, -1)$  sobre el subespacio  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0\}$  hay que hallar una base, a ser posible ortonormal. Puesto que

$$\begin{aligned} S &= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{matrix} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \gamma \end{matrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= L(\{\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (0, 0, 0, 1)\}) \end{aligned}$$

una base ortogonal es  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ , y una base ortonormal:

$$\left\{ \mathbf{w}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \mathbf{w}_2 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{w}_3 = (0, 0, 0, 1) \right\}$$

La proyección de  $\mathbf{u}$  sobre  $S$  es

$$\text{proy}_S \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_2) \mathbf{w}_2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_3) \mathbf{w}_3 = \frac{-2}{\sqrt{2}} \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3 = (-1, 1, 1, -1)$$

y sobre  $S^\perp$  es

$$\text{proy}_{S^\perp} \mathbf{u} = \mathbf{u} - \text{proy}_S \mathbf{u} = (1, 1, 0, 0)$$

El ángulo que forman  $\mathbf{u}$  y  $S$ , y la distancia entre ellos, es:

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbf{u}, S}) &= (\mathbf{u}, \widehat{\text{proy}_S \mathbf{u}}) = \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \text{proy}_S \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\text{proy}_S \mathbf{u}\|} = \arccos \frac{4}{\sqrt{6} \cdot 2} = \arccos \frac{2}{\sqrt{6}} \\ d(\mathbf{u}, S) &= \|\text{proy}_{S^\perp} \mathbf{u}\| = \|\mathbf{u} - \text{proy}_S \mathbf{u}\| = \|(1, 1, 0, 0)\| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

## 6.23 Diagonalización ortogonal

Una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  (o aplicación lineal asociada) es **ortogonalmente diagonalizable** si es diagonalizable respecto de una base ortogonal (u ortonormal), lo que equivale a que exista una base ortogonal (u ortonormal) de autovectores. Se puede probar que:

$$A \text{ es ortogonalmente diagonalizable} \iff A \text{ es simétrica}$$

## 6.24 Ejemplos

1. La matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  es simétrica y, por tanto, ortogonalmente diagonalizable. Sus autovalores son 1, con multiplicidad 2, y  $-1$ . Los subespacios propios asociados, y la base ortogonal respecto de la que es diagonalizable, son:

$$\begin{cases} S(1) = L(\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}) \\ S(-1) = L(\{(1, -1, 0)\}) \end{cases} \implies B = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, -1, 0)\}$$

Las matrices diagonal y de cambio de base son:

$$D = P^{-1}AP \quad \text{con} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  no es simétrica y, por tanto, no es ortogonalmente diagonalizable. Se puede ver que si es diagonalizable, pero respecto de una base que no es ortogonal.

## 7 Aplicaciones ortogonales

### 7.1 Aplicación ortogonal

Se llama **aplicación ortogonal** a un endomorfismo  $f : V \longrightarrow V$  sobre un espacio vectorial euclídeo  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  que conserva el producto escalar, es decir que

$$\langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

### 7.2 Matriz ortogonal

Una matriz cuadrada  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  se llama **matriz ortogonal** si  $A^t A = I$ .

### 7.3 Ejemplos

1. La matriz  $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  es ortogonal, pues

$$A^t A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I$$

2. La matriz  $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  no es ortogonal, pues

$$A^t A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \neq I$$

### 7.4 Teorema

Sea  $A = M(f, B)$  la matriz de la aplicación ortogonal  $f : V \longrightarrow V$  respecto de una base ortonormal  $B$  de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Entonces:

La aplicación  $f$  es ortogonal  $\iff$  La matriz  $A$  es ortogonal

**Demostración:** Basta observar que

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}) \rangle &= (f(\mathbf{u}))^t f(\mathbf{v}) = (A\mathbf{u})^t A\mathbf{v} = \mathbf{u}^t A^t A\mathbf{v} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t \mathbf{v} \end{aligned}$$

de donde se deduce que  $f$  es aplicación ortogonal si y sólo si  $A^t A = I$ , es decir si y sólo si  $A$  es una matriz ortogonal.

### 7.5 Observación

Si  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , entonces  $A^t = (b_{ij} = a_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$  y  $A^t A = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j$$

donde  $\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j$  es el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^n$  de las columnas  $\mathbf{c}_i$  y  $\mathbf{c}_j$  de la matriz  $A$ . Por lo tanto, una matriz es ortogonal si sus columnas forman una base ortonormal en  $\mathbb{R}^n$  con el producto escalar usual.

## 7.6 Lema

La matriz de un cambio de base entre bases ortonormales es ortogonal.

## 7.7 Teorema

Sea  $f : V \longrightarrow V$  una aplicación sobre el espacio euclídeo  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Entonces, la aplicación  $f$  es ortogonal si y sólo si conserva la norma, es decir:

$$f \text{ es ortogonal} \iff \|f(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

### Demostración:

( $\Rightarrow$ ) Si  $f$  es ortogonal, entonces

$$\|f(\mathbf{v})\| = \sqrt{\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v}) \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \|\mathbf{v}\|$$

para todo  $\mathbf{v} \in V$ , es decir conserva la norma.

( $\Leftarrow$ ) Si  $f$  conserva la norma:

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|^2 &= \langle f(\mathbf{u} - \mathbf{v}), f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rangle = \langle f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}), f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}) \rangle \\ &= \|f(\mathbf{u})\|^2 + \|f(\mathbf{v})\|^2 - 2 \langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}) \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2 \langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}) \rangle \\ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

y, puesto que  $\|f(\mathbf{u} - \mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ , entonces

$$\langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

para cualesquiera  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ , es decir  $f$  es ortogonal.

## 7.8 Observación

Las aplicaciones ortogonales conservan normas, distancias, ángulos.

## 7.9 Teorema

Sea  $f : V \longrightarrow V$  una aplicación sobre el espacio euclídeo  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Entonces, la aplicación  $f$  es ortogonal si y sólo si transforma bases ortonormales en bases ortonormales.

### Demostración:

( $\Rightarrow$ ) Si  $f$  es ortogonal, y  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  es una base ortonormal, entonces:

$$\langle f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{e}_j) \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{ si } i \neq j \\ 1 & , \text{ si } i = j \end{cases}$$

de donde se deduce que  $\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)\}$  es una base ortonormal.

( $\Leftarrow$ ) Si  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  es una base ortonormal, entonces  $f(B) = \{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)\}$  también es una base ortonormal, y si  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$  y  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{e}_i$  son vectores de  $V$ , se cumple que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (x_1, x_2, \dots, x_n)_B, (y_1, y_2, \dots, y_n)_B \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

y también que

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i f(\mathbf{e}_i), \sum_{j=1}^n y_j f(\mathbf{e}_j) \right\rangle = \langle (x_1, x_2, \dots, x_n)_{f(B)}, (y_1, y_2, \dots, y_n)_{f(B)} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

luego  $\langle f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ , y la aplicación  $f$  es ortogonal.

## 7.10 Ejemplos de aplicaciones ortogonales

Sea  $\mathbb{R}^n$  con el producto escalar usual respecto de su base canónica.

1. En  $\mathbb{R}^2$ , el giro de centro el origen y ángulo  $\alpha$  es una aplicación ortogonal. Usando números complejos, la imagen de  $x + iy$  mediante un giro centrado en el origen de ángulo  $\alpha$  es

$$e^{i\alpha}(x + iy) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(x + iy) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha) + i(x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

y, volviendo al plano  $\mathbb{R}^2$ , la ecuación del giro en la base canónica es:

$$G_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. En  $\mathbb{R}^2$ , la simetría respecto de la recta  $r \equiv ax + by = 0$  (que pasa por el origen) es una aplicación ortogonal. Puesto que  $\mathbf{u}_1 = (b, -a)$  es el vector de dirección de la recta y  $\mathbf{u}_2 = (a, b)$  el vector perpendicular, se tiene que  $S_r(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1$  y  $S_r(\mathbf{u}_2) = -\mathbf{u}_2$ , luego la matriz de la simetría respecto de la base  $B = \{\mathbf{u}_1 = (b, -a), \mathbf{u}_2 = (a, b)\}$  es

$$A = M(S_r, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^B & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^2)^B \\ \uparrow P^{-1} & & \downarrow P \\ (\mathbb{R}^2)^{B_c} & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^2)^{B_c} \end{array} \quad \text{siendo} \quad P = M(B, B_c) = \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix}$$

se tiene que:

$$C = M(S_r, B_c) = PAP^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

Luego la ecuación de la simetría, respecto de la recta  $r \equiv ax + by = 0$ , en la base canónica es:

$$S_r(x, y) = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3. En  $\mathbb{R}^3$ , un giro cuyo eje pasa por el origen es una aplicación ortogonal. Sean  $\alpha$  y  $r \equiv L(\{\mathbf{u}_1\})$ , con  $\|\mathbf{u}_1\| = 1$ , el ángulo y eje de giro. Completando el vector de dirección del eje hasta formar una base  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  ortonormal que verifique  $|P| > 0$ , donde  $P = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = M(B, B_c)$ , las matrices del giro respecto de esta base y la canónica son:

$$M(G_{r,\alpha}, B) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M(G_{r,\alpha}, B_c) = PAP^{-1}$$

4. En  $\mathbb{R}^3$ , la simetría respecto del plano  $\pi \equiv L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$  (que pasa por el origen) es una aplicación ortogonal. Añadiendo a los vectores de dirección del plano un vector  $\mathbf{u}_3$ , que sea ortogonal a ambos, se obtiene una base  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  respecto de la cual la matriz de la simetría es

$$M(S_\pi, B) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz respecto de la base canónica será:

$$M(S_\pi, B_c) = PAP^{-1} \quad \text{donde} \quad P = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = M(B, B_c)$$

### 7.11 Teorema

El determinante de una matriz ortogonal es  $\pm 1$ .

**Demostración:** Si  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  es una matriz ortogonal se cumple que  $A^t A = I$ , y tomando determinantes:

$$|A^t A| = |A|^2 = 1 \implies |A| = \pm 1$$

### 7.12 Teorema

Los autovalores reales de una aplicación ortogonal sólo pueden ser 1 o  $-1$ .

**Demostración:** Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un autovalor de la aplicación ortogonal  $f : V \longrightarrow V$ , existen autovectores no nulos  $\mathbf{v} \in V$  tales que  $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ . Puesto que las aplicaciones ortogonales conservan la norma:

$$\|\mathbf{v}\| = \|f(\mathbf{v})\| = \|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\| \implies |\lambda| = 1 \implies \lambda = \pm 1$$

### 7.13 Clasificación de las aplicaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación ortogonal cuya matriz respecto de una base ortonormal es  $A$ , es decir:

$$f(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

siendo  $A^t A = I$  y  $|A| = \pm 1$ . Puesto que  $A^t = A^{-1}$ , se ha de cumplir que

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b = -c|A| \\ d = a|A| \end{cases}$$

Luego la matriz de la aplicación ortogonal, respecto de una base ortonormal, será:

$$A = \begin{pmatrix} a & -c|A| \\ c & a|A| \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad |A| = \pm 1$$

Pueden presentarse dos casos:

1. Si  $|A| = 1$ , entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad |A| = a^2 + c^2 = 1$$

luego existe un único  $\alpha \in [0, 2\pi)$  tal que  $a = \cos \alpha$  y  $c = \sin \alpha$  de donde

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

y la aplicación ortogonal es un giro, centrado en el origen, de ángulo  $\alpha$  con

$$\text{traza}(A) = 2a = 2 \cos \alpha \implies \alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A)}{2}$$

donde la traza de una matriz es la suma de los elementos de su diagonal principal.

2. Si  $|A| = -1$ , entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad |A| = -(a^2 + c^2) = -1 \quad \text{y} \quad P(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

Sus autovalores son  $\lambda = 1$  y  $\lambda = -1$ , y existirán autovectores  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  tales que

$$\begin{cases} f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 \\ f(\mathbf{u}_2) = -\mathbf{u}_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$$

ya que las aplicaciones ortogonales conservan el producto escalar:

$$f(\mathbf{u}_1) \cdot f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \implies \mathbf{u}_1 \cdot (-\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \implies -(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \implies \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$$

Luego la aplicación ortogonal es una simetría respecto de la recta  $r \equiv L(\{\mathbf{u}_1\}) = S(1)$ , donde  $S(1)$  es el subespacio propio asociado al autovalor  $\lambda = 1$ .

En resumen, se tiene la siguiente clasificación:

	<b>Aplicación ortogonal</b>
$ A  = 1$	Giro de centro el origen y ángulo $\alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A)}{2}$
$ A  = -1$	Simetría respecto de recta $r \equiv S(1)$

En el caso particular de un giro de ángulo  $\alpha = 0$ , la aplicación ortogonal es la identidad.

### 7.14 Clasificación de las aplicaciones ortogonales en $\mathbb{R}^3$

Sea  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación ortogonal cuya matriz respecto de una base ortonormal es  $A$ , es decir:

$$f(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A^t A = I$$

Puesto que los autovalores reales de  $A$  sólo pueden ser  $\pm 1$ , y el polinomio característico tiene grado 3, alguno de ellos debe ser 1 o  $-1$ . Si  $S(1) = \text{Ker}(A - I)$  es el subespacio propio asociado a  $\lambda = 1$ , se pueden presentar los siguientes casos:

1. Si  $\dim S(1) = 3$ , la aplicación ortogonal es la identidad y  $A = I$ .
2. Si  $\dim S(1) = 2$ , se considera una base ortonormal  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ , siendo  $S(1) = L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$ . Puesto que las aplicaciones ortogonales conservan bases ortonormales:

$$f(B) = \{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3)\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, f(\mathbf{u}_3)\} \text{ es ortonormal} \implies f(\mathbf{u}_3) = -\mathbf{u}_3$$

ya que  $f(\mathbf{u}_3) \neq \mathbf{u}_3$  al ser  $\dim S(1) = 2$ . Luego la aplicación ortogonal  $f$  es una simetría respecto del plano  $\pi \equiv S(1)$  y su matriz respecto de la base  $B$  es

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Si  $\dim S(1) = 1$ , se considera una base ortonormal  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ , siendo  $S(1) = L(\{\mathbf{u}_1\})$  y  $|(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)| > 0$ . Puesto que las aplicaciones ortogonales conservan bases ortonormales:

$$f(B) = \{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3)\} = \{\mathbf{u}_1, f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3)\}$$

es ortonormal. Por lo tanto

$$L(\{f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3)\}) = L(\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}) = S(1)^\perp$$

y la aplicación  $f$  en el plano  $S(1)^\perp$ , que no puede ser una simetría, es un giro centrado en el origen. Luego la aplicación ortogonal  $f$  es un giro con eje en la recta  $r \equiv S(1)$  y su matriz respecto de la base  $B$  es

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Puesto que las matrices asociadas a un endomorfismo respecto de cualquier base tienen la misma traza, se ha de cumplir que

$$1 + 2 \cos \alpha = \text{traza}(A) \implies \alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A) - 1}{2}$$

4. Si  $\dim S(1) = 0$ , entonces  $\lambda = -1$  es autovalor, ya que  $\lambda = 1$  no puede serlo. Se considera una base ortonormal  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ , siendo  $\mathbf{u}_1 \in S(-1)$  y  $|(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)| > 0$ . Puesto que las aplicaciones ortogonales conservan bases ortonormales:

$$f(B) = \{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3)\} = \{-\mathbf{u}_1, f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3)\}$$

es ortonormal. Por lo tanto

$$L(\{f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3)\}) = L(\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}) = L(\{\mathbf{u}_1\})^\perp$$

y la aplicación  $f$  en el plano  $L(\{\mathbf{u}_1\})^\perp$  es un giro centrado en el origen. Luego la aplicación ortogonal  $f$  es una simetría respecto del plano  $\pi \equiv L(\{\mathbf{u}_1\})^\perp$  compuesta con un giro de eje la recta  $r \equiv L(\{\mathbf{u}_1\})$ , y su matriz respecto de la base  $B$  es

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$



Puesto que las matrices asociadas a un endomorfismo respecto de cualquier base tienen la misma traza, se ha de cumplir que

$$-1 + 2 \cos \alpha = \text{traza}(A) \implies \alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A) + 1}{2}$$

En el caso particular de que  $\alpha = \pi$ , entonces

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y  $f$  es una simetría central con centro en el origen. En este caso  $\dim S(-1) = 3$ .

En resumen, se tiene la siguiente clasificación:

$\dim S(1)$	$\dim S(-1)$	Aplicación ortogonal
3	0	Identidad
2	1	Simetría respecto del plano $\pi \equiv S(1)$
1	0 ó 2	Giro de eje $r \equiv S(1)$ y ángulo $\alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A)-1}{2}$
0	1	Simetría respecto del plano $\pi \equiv S(-1)^\perp$ compuesta con giro de eje $r \equiv S(-1)$ y ángulo $\alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A)+1}{2}$
0	3	Simetría central, con centro el origen

## 8 Movimientos

### 8.1 Movimiento

Se llama **movimiento** a una aplicación  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , no necesariamente lineal, que se puede escribir en la forma:

$$f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b} \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \text{ una matriz ortogonal } (A^t A = I) \\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Obviamente, cuando  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  el movimiento es una aplicación lineal ortogonal, y en caso contrario no es aplicación lineal.

### 8.2 Observaciones

1. Un movimiento,  $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$ , es la composición de una aplicación ortogonal con una traslación:

$$\left. \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_{\mathbf{b}}} & \mathbb{R}^n \\ \mathbf{u} & \longrightarrow & A\mathbf{u} & \longrightarrow & A\mathbf{u} + \mathbf{b} \end{array} \right\} \implies f = T_{\mathbf{b}} \circ A$$

2. Los movimientos conservan las distancias: Si  $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$ , entonces

$$d(f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})) = \|(A\mathbf{u} + \mathbf{b}) - (A\mathbf{v} + \mathbf{b})\| = \|A(\mathbf{u} - \mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

ya que las aplicaciones ortogonales conservan la norma.

### 8.3 Puntos fijos de un movimiento

Se llama **punto fijo** de un movimiento  $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$  a cualquier punto  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(\mathbf{w}) = A\mathbf{w} + \mathbf{b} = \mathbf{w}$ .

### 8.4 Movimientos en $\mathbb{R}^2$

1. **Traslación de vector  $\mathbf{v} = (\alpha, \beta)$ :**

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} = I\mathbf{u} + \mathbf{v}$$

En forma cartesiana:

$$T_{\mathbf{v}}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha \\ y + \beta \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{l} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{array} \right.$$

No tiene puntos fijos, salvo en el caso trivial de que  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  (en este caso el movimiento es la identidad y todos los puntos son fijos).

2. **Giro de centro  $\mathbf{c} = (x_0, y_0)$  y ángulo  $\alpha$ :** Se puede obtener como la composición de una traslación de vector  $-\mathbf{c}$  (que traslada el centro de giro al origen), con un giro centrado en el origen de ángulo  $\alpha$ , y con una traslación de vector  $\mathbf{c}$  (que devuelve el centro de giro a su posición inicial). Por lo tanto:

$$G_{\mathbf{c}, \alpha}(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} = A\mathbf{u} + (\mathbf{c} - A\mathbf{c})$$

donde  $A$  es la matriz del giro centrado en el origen de ángulo  $\alpha$ . En forma cartesiana:

$$G_{\mathbf{c},\alpha}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

El único punto fijo es el centro de giro, salvo en el caso trivial de que  $\alpha = 0$  o  $\alpha = 2\pi$  (en estos casos el movimiento es la identidad y todos los puntos son fijos).

3. **Simetría respecto de la recta**  $r \equiv ax + by + c = 0$ : Si  $\mathbf{c} \in r$  es un punto de la recta, esta simetría se puede obtener como la composición de una traslación de vector  $-\mathbf{c}$  (que transforma la recta en otra paralela que pasa por el origen), con una simetría respecto de la recta  $ax + by = 0$ , y con una traslación de vector  $\mathbf{c}$  (que devuelve la recta a su posición inicial). Por lo tanto:

$$S_r(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} = A\mathbf{u} + (\mathbf{c} - A\mathbf{c})$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

es la matriz de la simetría respecto de la recta  $ax + by = 0$ . Todos los puntos de la recta  $r$  son puntos fijos.

4. **Simetría deslizante respecto de la recta**  $r \equiv ax + by + c = 0$  **con vector**  $\mathbf{v} \parallel r$ : Es la composición de una simetría respecto de la recta  $r \equiv ax + by + c = 0$  con una traslación de vector  $\mathbf{v}$ . Por lo tanto, si  $\mathbf{c} \in r$ , su ecuación es:

$$SD_{r,\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = T_{\mathbf{v}} \circ S_r(\mathbf{u}) = [A(\mathbf{u} - \mathbf{c}) + \mathbf{c}] + \mathbf{v} = A\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{c} - A\mathbf{c})$$

donde  $A$  es la matriz de la simetría respecto de la recta  $ax + by = 0$ . No hay puntos fijos, salvo en el caso en que  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  (el movimiento es una simetría sin deslizamiento y los puntos fijos son los de la recta  $r$ ).

## 8.5 Ejemplos

1. Las ecuaciones de la traslación de vector  $\mathbf{v} = (1, -1)$  son

$$T_{\mathbf{v}}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases}$$

2. Las ecuaciones de un giro con centro en  $\mathbf{c} = (1, 2)$  y ángulo  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  son:

$$G_{\mathbf{c},\alpha}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x' = 3 - y \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

3. Para hallar las ecuaciones de una simetría respecto de la recta  $r \equiv y - x = 1$  se considera uno de sus puntos, por ejemplo  $(0, 1)$ , y la matriz de la simetría respecto de su recta paralela que pasa por el origen ( $x - y = 0$ ):

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de la simetría son:

$$S_r(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x' = y-1 \\ y' = x+1 \end{cases}$$

4. Para hallar las ecuaciones de la simetría deslizante respecto de la recta  $r \equiv y - x = 1$  con vector  $\mathbf{v} = (3, 3)$  se halla la matriz de la simetría respecto de su recta paralela que pasa por el origen ( $x - y = 0$ ), que es la misma matriz  $A$  del ejemplo anterior, y un punto de la recta, por ejemplo  $(0, 1)$ . Las ecuaciones de la simetría deslizante son:

$$SD_{r,\mathbf{v}}(x, y) = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x' = y+2 \\ y' = x+4 \end{cases}$$

## 8.6 Movimientos en $\mathbb{R}^3$

1. **Traslación de vector  $\mathbf{v}$ :**

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

No tiene puntos fijos, salvo en el caso trivial de que  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  (en este caso el movimiento es la identidad y todos los puntos son fijos).

2. **Giro de ángulo  $\alpha$  y eje la recta  $r \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_1\})$ :** Se puede obtener como la composición de una traslación de vector  $-\mathbf{u}_0$  (que hace pasar el eje de giro por el origen), con un giro de eje  $L(\{\mathbf{u}_1\})$  y ángulo  $\alpha$ , y con una traslación de vector  $\mathbf{u}_0$  (que devuelve el eje de giro a su posición inicial). Por lo tanto:

$$G_{r,\alpha}(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_0 = A\mathbf{u} + (\mathbf{u}_0 - A\mathbf{u}_0)$$

donde  $A$  es la matriz del giro de ángulo  $\alpha$  y eje  $L(\{\mathbf{u}_1\})$ . Los únicos puntos fijos son los del eje de giro, salvo en el caso trivial de que  $\alpha = 0$  o  $\alpha = 2\pi$  (en estos casos el movimiento es la identidad y todos los puntos son fijos). Si  $\alpha = \pi$ , el giro se suele llamar **simetría axial** de eje  $r$ .

3. **Movimiento helicoidal de ángulo  $\alpha$ , eje  $r \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_1\})$  y vector de traslación  $\mathbf{v} \parallel r$ :** Es la composición de un giro de ángulo  $\alpha$  y eje  $r \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_1\})$  con una traslación de vector  $\mathbf{v}$ . Por lo tanto, su ecuación es:

$$MH_{r,\alpha,\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = T_{\mathbf{v}} \circ G_{r,\alpha}(\mathbf{u}) = [A(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_0] + \mathbf{v} = A\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{u}_0 - A\mathbf{u}_0)$$

donde  $A$  es la matriz del giro de ángulo  $\alpha$  y eje  $L(\{\mathbf{u}_1\})$ . En general, no hay puntos fijos.

4. **Simetría respecto del plano  $\pi \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$ :** Se puede obtener como la composición de una traslación de vector  $-\mathbf{u}_0$  (que hace pasar al plano de simetría por el origen), con una simetría respecto del plano  $L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$ , y con una traslación de vector  $\mathbf{u}_0$  (que devuelve el plano de simetría a su posición inicial). Por lo tanto:

$$S_{\pi}(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_0 = A\mathbf{u} + (\mathbf{u}_0 - A\mathbf{u}_0)$$

donde  $A$  es la matriz de la simetría respecto del plano  $L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$ . Todos los puntos del plano  $\pi$  son puntos fijos.

5. **Simetría deslizante respecto del plano**  $\pi \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$  **con vector**  $\mathbf{v} \parallel \pi$ : Es la composición de una simetría respecto del plano  $\pi \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$  con una traslación de vector  $\mathbf{v}$ . Por lo tanto, su ecuación es:

$$SD_{\pi, \mathbf{v}}(\mathbf{u}) = T_{\mathbf{v}} \circ S_{\pi}(\mathbf{u}) = [A(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_0] + \mathbf{v} = A\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{u}_0 - A\mathbf{u}_0)$$

donde  $A$  es la matriz de la simetría respecto del plano  $L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$ . No hay puntos fijos, salvo en el caso en que  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  (el movimiento es una simetría sin deslizamiento y los puntos fijos son los del plano  $\pi$ ).

6. **Simetría rotacional**: Es la composición de una simetría respecto del plano  $\pi \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$  con un giro de ángulo  $\alpha$  y eje la recta  $r \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_3\})$  perpendicular a  $\pi$  ( $r \cap \pi = \{\mathbf{u}_0\}$ ). Su ecuación es:

$$SR(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_0 = A\mathbf{u} + (\mathbf{u}_0 - A\mathbf{u}_0)$$

donde  $A$  es la matriz de la composición de una simetría respecto del plano  $L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$  con un giro de ángulo  $\alpha$  y eje  $L(\{\mathbf{u}_3\})$ . El único punto fijo es el punto  $\mathbf{u}_0$  de intersección de la recta y el plano, salvo en el caso de que  $\alpha = 0$  o  $\alpha = 2\pi$  en que la simetría rotacional se reduce a la simetría respecto del plano  $\pi$ . En el caso particular  $\alpha = \pi$  la simetría rotacional se llama **simetría central** y su ecuación es:

$$SC(\mathbf{u}) = -(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_0 = -\mathbf{u} + 2\mathbf{u}_0$$

## 8.7 Ejemplos

1. Para hallar la ecuación de un giro de ángulo  $\alpha = \pi/2$  y de eje la recta  $r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ , hay que comenzar hallando la matriz del giro del mismo ángulo y eje la recta  $y = z = 0$ , que es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y puesto que  $(0, 1, 2) \in r$ , la ecuación del giro es:

$$G_{r, \alpha}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \\ z - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3 - z \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

2. La simetría axial respecto de la recta  $r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$  es el giro con eje en la misma recta y ángulo  $\alpha = \pi$ . Como en el ejemplo anterior, su ecuación es:

$$\begin{aligned} G_{r, \pi}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi & -\sin \pi \\ 0 & \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \\ z - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \\ z - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 - y \\ 4 - z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Para hallar la ecuación del movimiento helicoidal de eje  $r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ , ángulo  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  y vector  $\mathbf{v} = (2, 0, 0)$ , se halla la matriz del giro del mismo ángulo y eje la recta  $y = z = 0$ , que es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y puesto que  $(0, 1, 2) \in r$ , la ecuación del movimiento helicoidal es:

$$MH_{r,\alpha,\mathbf{v}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ 3-z \\ y+1 \end{pmatrix}$$

4. Para hallar la ecuación de la simetría respecto del plano  $\pi \equiv y - z = 1$ , hay que hallar la matriz de la simetría respecto del plano  $y - z = 0$ , que es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y, puesto que  $(0, 1, 0) \in \pi$ , la ecuación de la simetría es:

$$S_{\pi}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

5. La simetría deslizante respecto del plano  $\pi \equiv y - z = 1$  con vector de deslizamiento  $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$ , es la composición de la simetría respecto del plano  $\pi$  (la del ejemplo anterior) con la traslación de vector  $\mathbf{v}$ . Por lo tanto, su ecuación es:

$$SD_{\pi,\mathbf{v}}(x, y, z) = T_{\mathbf{v}} \circ S_{\pi}(x, y, z) = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ z+3 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

6. La simetría rotacional de eje  $r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ , ángulo  $\alpha = \pi/2$  y plano  $\pi \equiv x = -1$  tiene por matriz la asociada a la composición de una simetría respecto del plano  $x = 0 \equiv L(\{\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\})$  con un giro de ángulo  $\pi/2$  y eje la recta  $y = z = 0 \equiv L(\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)\})$ , es decir:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puesto que  $r \cap \pi = (-1, 1, 2)$ , la ecuación de la simetría rotacional es

$$SR(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2 \\ -z+3 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

7. La ecuación de la simetría central respecto del punto  $Q(-1, 1, 2)$  es

$$SC(x, y, z) = - \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2 \\ -y+2 \\ -z+4 \end{pmatrix}$$

## 8.8 Clasificación de movimientos en $\mathbb{R}^2$

Sea  $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$ ,  $A^t A = I$ , un movimiento, y sea  $S(1) = \text{Ker}(A - I)$  el subespacio de vectores invariantes de  $A$ . Se pueden presentar los siguientes casos:

1. Si  $\dim S(1) = 2$ , entonces  $A = I$  y el movimiento es una traslación de vector  $\mathbf{b}$ .
2. Si  $\dim S(1) = 1$ , la aplicación ortogonal asociada a la matriz  $A$  es una simetría, y se pueden presentar dos casos:
  - (a) Hay puntos fijos: el movimiento es una simetría respecto de la recta  $\{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\}$ .
  - (b) No hay puntos fijos: el movimiento es una simetría deslizante con vector  $\mathbf{v}$  que ha de verificar:

$$f(f(\mathbf{0})) = f^2(\mathbf{0}) = 2\mathbf{v} \implies \mathbf{v} = \frac{1}{2}f^2(\mathbf{0})$$

y recta de simetría  $r \equiv \{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}\}$ .

3. Si  $\dim S(1) = 0$ , el movimiento es un giro de centro el único punto fijo  $\mathbf{c}$ , es decir tal que  $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ , y ángulo  $\alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A)}{2}$ .

En resumen, se tiene la siguiente clasificación:

$\dim S(1)$	Puntos fijos	Movimiento: $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$
2		Traslación de vector $\mathbf{b}$
1	Si	Simetría respecto de la recta $\{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\}$
1	No	Simetría deslizante de vector $\mathbf{v} = \frac{1}{2}f^2(\mathbf{0})$ y eje la recta $r \equiv \{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}\}$
0		Giro de centro el vector $\mathbf{c}$ , tal que $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ , y ángulo $\alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A)}{2}$

## 8.9 Clasificación de movimientos en $\mathbb{R}^3$

Sea  $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$ ,  $A^t A = I$ , un movimiento, y sea  $S(1) = \text{Ker}(A - I)$  el subespacio de vectores invariantes de  $A$ . Se pueden presentar los siguientes casos:

1. Si  $\dim S(1) = 3$ , entonces  $A = I$  y el movimiento es una traslación de vector  $\mathbf{b}$ .
2. Si  $\dim S(1) = 2$ , la aplicación ortogonal asociada a la matriz  $A$  es una simetría, y se pueden presentar dos casos:
  - (a) Hay puntos fijos: el movimiento es una simetría respecto del plano  $\{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\}$ .
  - (b) No hay puntos fijos: el movimiento es una simetría deslizante con vector  $\mathbf{v}$  que ha de verificar:

$$f(f(\mathbf{0})) = f^2(\mathbf{0}) = 2\mathbf{v} \implies \mathbf{v} = \frac{1}{2}f^2(\mathbf{0})$$

y plano de simetría  $\pi \equiv \{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}\}$ .

3. Si  $\dim S(1) = 1$ , la aplicación ortogonal asociada a la matriz  $A$  es un giro, y se pueden presentar dos casos:
- (a) Hay puntos fijos: el movimiento es un giro respecto de la recta  $\{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\}$  y ángulo  $\alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A)-1}{2}$ .
  - (b) No hay puntos fijos: el movimiento es un movimiento helicoidal con eje la recta  $r \equiv \{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \in S(1)\}$ , ángulo  $\alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A)-1}{2}$ , y vector de deslizamiento  $\mathbf{v} = f(\mathbf{v}_0) - \mathbf{v}_0$ , con  $\mathbf{v}_0 \in r$ .
4. Si  $\dim S(1) = 0$ , se pueden presentar dos casos:
- (a) Si  $\dim S(-1) = 3$ , entonces  $A = -I$  y el movimiento es una simetría central con centro en su único punto fijo  $\mathbf{c}$  ( $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ ).
  - (b) Si  $\dim S(-1) = 1$ , el movimiento es una simetría rotacional. Si  $\mathbf{c}$  es su punto fijo ( $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ ), el eje de giro es  $\mathbf{c} + S(-1)$ , el plano de simetría es  $\mathbf{c} + S(-1)^\perp$ , y el ángulo de giro  $\alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A)+1}{2}$ .

En resumen, se tiene la siguiente clasificación:

$\dim S(1)$		<b>Movimiento:</b> $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$
3		Traslación de vector $\mathbf{b}$
2	Hay puntos fijos	Simetría respecto del plano $\{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\}$
2	No hay puntos fijos	Simetría deslizante de vector $\mathbf{v} = \frac{1}{2}f^2(\mathbf{0})$ respecto del plano $\pi \equiv \{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}\}$
1	Hay puntos fijos	Giro respecto de la recta $r \equiv \{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\}$ , y ángulo $\alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A)-1}{2}$
1	No hay puntos fijos	Movimiento helicoidal de eje $r \equiv \{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \in S(1)\}$ , ángulo $\alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A)-1}{2}$ , y vector de deslizamiento $\mathbf{v} = f(\mathbf{v}_0) - \mathbf{v}_0$ , con $\mathbf{v}_0 \in r$
0	$\dim S(-1) = 3$	Simetría central respecto de $\mathbf{c}$ , con $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$
0	$\dim S(-1) = 1$	Simetría rotacional de eje $\mathbf{v}_0 + S(-1)$ y plano $\mathbf{v}_0 + S(-1)^\perp$ , con $f(\mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_0$ , y ángulo $\alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A)+1}{2}$



## 9 Cónicas

### 9.1 Cónicas

Se llama **cónica** a cualquiera de las secciones planas que se producen al cortar en el espacio un doble cono recto por un plano.

Si el doble cono recto tiene vértice  $O$ , eje  $r$  y ángulo  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , y el plano  $\Pi$  forma un ángulo  $\beta$  con el eje del cono, se pueden presentar los siguientes casos:

1. Si  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , es decir si  $r \perp \Pi$ , la cónica es una **circunferencia** (si  $O \notin \Pi$ ) o un **punto** (si  $O \in \Pi$ ).
2. Si  $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ , la cónica es una **elipse** (si  $O \notin \Pi$ ) o un **punto** (si  $O \in \Pi$ ).
3. Si  $\beta = \alpha$ , la cónica es una **parábola** (si  $O \notin \Pi$ ) o una **recta** (si  $O \in \Pi$ ).
4. Si  $0 \leq \beta < \alpha$ , la cónica es una **hipérbola** (si  $O \notin \Pi$ ) o un **par de rectas** (si  $O \in \Pi$ ).

Cuando  $O \in \Pi$ , la cónica se llama **cónica degenerada**.

La ecuación analítica de una cónica es:

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

con  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a \in \mathbb{R}$ , que también se llama **ecuación general** de la cónica.

### 9.2 Ecuación reducida de una cónica

Mediante un movimiento (giro y/o traslación) la ecuación general de una cónica se reduce a una de las siguientes **ecuaciones reducidas**:

1.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = p$ , con  $a, b > 0$  y  $p = -1, 0, 1$  (cónica de tipo elíptico).
  - Si  $p = 1$ , la cónica reducida es
    - una **elipse**, si  $a \neq b$ , con centro el origen, ejes los cartesianos y focos en los puntos  $(\pm c, 0)$ , si  $a > b$  ( $c^2 = a^2 - b^2$ ), o  $(0, \pm c)$ , si  $a < b$  ( $c^2 = b^2 - a^2$ ).
    - una **circunferencia**, si  $a = b$ , con centro el origen y radio  $a$ .
  - Si  $p = 0$ , la cónica reducida es un **punto** (el origen).
  - Si  $p = -1$ , la cónica reducida carece de puntos, y se llama **elipse imaginaria**.
2.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = p$ , con  $a, b > 0$  y  $p = -1, 0, 1$  (cónica de tipo hiperbólico).
  - Si  $p = 1$ , la cónica reducida es una **hipérbola** con centro el origen, ejes los cartesianos y focos en los puntos  $(\pm c, 0)$ , con  $c^2 = a^2 + b^2$ .
  - Si  $p = 0$ , la cónica reducida es un **par de rectas secantes**.
  - Si  $p = -1$ , la cónica reducida es una **hipérbola** con centro el origen, ejes los cartesianos y focos en los puntos  $(0, \pm c)$ , con  $c^2 = a^2 + b^2$ .
3.  $y^2 = 2px$ , con  $p \neq 0$  (cónica de tipo parabólico). La cónica reducida es una **parábola** con centro o vértice en el origen, ejes los cartesianos, foco  $(\frac{p}{2}, 0)$  y directriz  $x = -\frac{p}{2}$ .

4.  $x^2 = 2py$ , con  $p \neq 0$  (cónica de tipo parabólico). La cónica reducida es una **parábola** con centro el origen, ejes los cartesianos, foco  $(0, \frac{p}{2})$  y directriz  $y = -\frac{p}{2}$ .
5.  $y^2 = q$  o  $x^2 = q$  (cónica de tipo parabólico). La cónica reducida es un **par de rectas paralelas** (si  $q > 0$ ), una **recta doble** (si  $q = 0$ ) o un **par de rectas imaginarias** (si  $q < 0$ ).

### 9.3 Obtención de la ecuación reducida de una cónica

Sea

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

con  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a \in \mathbb{R}$ , la ecuación general de una cónica, que se puede expresar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a = 0$$

donde la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}$$

es simétrica y, por tanto, diagonalizable ortogonalmente (respecto de una base ortonormal de autovectores). El proceso a seguir, para obtener la ecuación reducida, es el siguiente:

1. Si  $a_{12} \neq 0$ , los ejes de la cónica no son paralelos a los ejes cartesianos, por lo que se hace un giro para obtener una cónica equivalente con los ejes paralelos a los cartesianos. Se determinan los autovalores de la matriz  $A$ ,  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ , y una base ortonormal de autovectores  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  con  $|(\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2)| = 1$ . La matriz del cambio de base  $P = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) = M(B, B_c)$  es ortogonal, es decir  $P^{-1} = P^t$ , y se cumple que

$$P^{-1}AP = P^tAP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Aplicando el giro  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , se tiene que  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  y, sustituyendo en la ecuación de la cónica, queda:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} P^tAP \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + a = 0$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + a = 0$$

donde  $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} P$ . Operando, la ecuación de la cónica después del giro es

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + a = 0$$

que ya no tiene término en  $xy$ .

Si  $a_{12} = 0$ , los ejes de la cónica ya son paralelos a los cartesianos y se pasa directamente al paso siguiente.

2. Si  $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$ , el centro de la cónica (si es una cónica con centro) no es el origen o la cónica (si no tiene centro) no pasa por el origen. En este caso se aplica una traslación para que el centro (si es una cónica con centro) sea el origen o la cónica (si no tiene centro) pase por el origen. Se pueden presentar los siguientes casos:

- (a) Si  $\delta = |A| = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ , la cónica es de tipo elíptico. Completando cuadrados en su expresión:

$$\lambda_1 \left( x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 = \frac{b_1^2}{4\lambda_1} + \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - a = c$$

Aplicando la traslación  $\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \\ y_2 = y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \end{cases}$ , se obtiene la ecuación reducida de la cónica:

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = c \quad \text{que es} \quad \begin{cases} \text{una elipse real, si } c\lambda_1 > 0 \\ \text{un punto, si } c = 0 \\ \text{una elipse imaginaria, si } c\lambda_1 < 0 \end{cases}$$

- (b) Si  $\delta = |A| = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ , la cónica es de tipo hiperbólico. Completando cuadrados como en el apartado anterior, y aplicando la misma traslación, se obtiene la ecuación reducida de la cónica:

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = c \quad \text{que es} \quad \begin{cases} \text{una hipérbola, si } c \neq 0 \\ \text{un par de rectas secantes, si } c = 0 \end{cases}$$

- (c) Si  $\delta = |A| = \lambda_1 \lambda_2 = 0$ , la cónica es de tipo parabólico. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 \neq 0$  (los dos no se pueden anular simultáneamente), la expresión de la cónica sería:

$$\lambda_2 y_1^2 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + a = 0$$

Completando cuadrados, se obtiene

$$\lambda_2 \left( y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 = \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - a - b_1 x_1$$

Entonces:

- i. Si  $b_1 \neq 0$ , aplicando la traslación  $\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{a}{b_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2 b_1} \\ y_2 = y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \end{cases}$ , se obtiene la ecuación reducida de la cónica:

$$\lambda_2 y_2^2 = -b_1 x_2 \quad \text{que es una parábola}$$

- ii. Si  $b_1 = 0$ , aplicando la traslación  $\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \end{cases}$ , se obtiene la ecuación reducida de la cónica:

$$\lambda_2 y_2^2 = \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - a = c \quad \text{que es} \quad \begin{cases} \text{un par de rectas paralelas, si } c\lambda_2 > 0 \\ \text{una recta doble, si } c = 0 \\ \text{un par de rectas imaginarias, si } c\lambda_2 < 0 \end{cases}$$

Si  $b_1 = b_2 = 0$ , el centro de la cónica (si es una cónica con centro) es el origen o la cónica (si no tiene centro) pasa por el origen, y la ecuación obtenida después del giro es la ecuación reducida de la cónica.

## 9.4 Centro o vértice, y ejes de una cónica no degenerada

Cuando la cónica es no degenerada, su centro o vértice se obtiene aplicando al origen (que es el centro o vértice de la cónica reducida) los movimientos inversos a los usados para obtener la ecuación reducida: en primer lugar la traslación de vector opuesto, y después el giro de ángulo opuesto.

Si la cónica es una elipse o una hipérbola, sus ejes son las rectas que pasan por el centro de la cónica con la dirección de los autovectores de la matriz  $A$ .

Si la cónica es una parábola, su eje principal es la recta que pasa por el centro con la dirección del autovector asociado al autovalor nulo, y su eje secundario es la recta que pasa por el centro con la dirección del autovector asociado al autovalor no nulo.

## 9.5 Ejemplos

1. Para hallar la ecuación reducida de la cónica  $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2 = 0$ , se expresa en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 = 0$$

La matriz asociada y sus autovalores son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} ; \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) \implies \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

Los subespacios propios son

$$S(2) = \left\{ v : (A - 2I)v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{v : x - y = 0\} = L(\{(1, 1)\})$$

$$S(4) = \left\{ v : (A - 4I)v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{v : x + y = 0\} = L(\{(-1, 1)\})$$

La matriz diagonal y la matriz de paso son:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad P^t A P = D$$

Aplicando a la cónica el giro

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con centro el origen y ángulo  $-45^\circ$ , se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} P^t A P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - 2 = 0$$

y operando:

$$2x_1^2 + 4y_1^2 = 2 \implies x_1^2 + \frac{y_1^2}{1/2} = 1$$

que es la ecuación reducida de la cónica, que corresponde a una elipse. No es necesario usar traslaciones. La ecuación reducida también se suele expresar renombrando las variables  $(x_1, y_1)$  como  $(x, y)$ , es decir como

$$x^2 + \frac{y^2}{1/2} = 1$$

Puesto que no se ha aplicado traslación, el centro de la elipse coincide con el de la cónica reducida, es decir es el origen. Sus ejes son las rectas que pasan por el origen con la dirección de los autovectores:

$$\begin{cases} \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{1} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

La representación gráfica de la cónica es la de la figura.

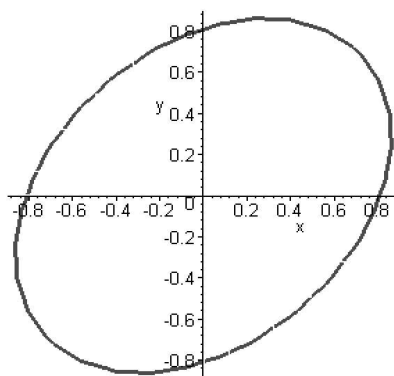


Figure 1: Representación gráfica de la cónica  $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2 = 0$

2. Para hallar la ecuación reducida de la cónica  $x^2 + y^2 + 4xy - x + y + 1 = 0$ , se expresa en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0$$

La matriz asociada y sus autovalores son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) \implies \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Los subespacios propios son

$$S(3) = \left\{ v : (A - 3I)v = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{v : x - y = 0\} = L(\{(1, 1)\})$$

$$S(-1) = \left\{ v : (A + I)v = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{v : x + y = 0\} = L(\{(-1, 1)\})$$

La matriz diagonal y la matriz de paso son:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad P^t A P = D$$

Aplicando a la cónica el giro

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con centro el origen y ángulo  $-45^\circ$ , se obtiene

$$(x_1 \ y_1) P^t A P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (-1 \ 1) P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 1 = 0$$

y operando:

$$3x_1^2 - y_1^2 + \sqrt{2}y_1 + 1 = 0 \implies 3x_1^2 - \left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{3}{2}$$

Si ahora se aplica la traslación

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

se llega a

$$3x_2^2 - y_2^2 = \frac{-3}{2} \implies \frac{x_2^2}{1/2} - \frac{y_2^2}{3/2} = -1$$

que es la ecuación reducida de la cónica, que corresponde a una hipérbola. La ecuación reducida también se suele expresar renombrando las variables  $(x_2, y_2)$  como  $(x, y)$ , es decir como

$$\frac{x^2}{1/2} - \frac{y^2}{3/2} = -1$$

Aplicando la traslación opuesta y el giro inverso al centro de la cónica reducida, se obtienen el centro de la cónica original. El centro es

$$C = (0, 0)_2 \implies C = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})_1 \implies C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \implies C = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Los ejes son las rectas que pasan por el centro y cuyos vectores de dirección son los vectores propios, es decir:

$$\begin{cases} \frac{x+\frac{1}{2}}{-1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} \\ \frac{x+\frac{1}{2}}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

La representación gráfica de la cónica es la de la figura.

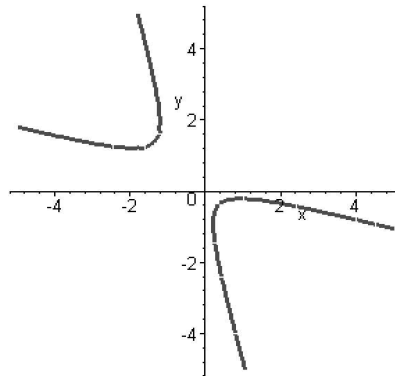


Figure 2: Representación gráfica de la cónica  $x^2 + y^2 + 4xy - x + y + 1 = 0$

## 9.6 Clasificación de cónicas por invariantes

Para clasificar una cónica, de ecuación general

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

con  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a \in \mathbb{R}$ , no es necesario encontrar el movimiento (giro y/o traslación) que la transforma en su ecuación reducida. Se puede hacer a partir de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix} \quad y \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_1}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \frac{a_2}{2} \\ \frac{a_1}{2} & \frac{a_2}{2} & a \end{pmatrix}$$

Si  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$  son los autovalores de  $A$ ,  $\delta = |A|$  y  $\Delta = |\bar{A}|$ , entonces:

	Tipo	Ecuación reducida	Cónica
$\delta > 0$	Elíptico	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = \frac{-\Delta}{\delta}$	Elipse real, si $\lambda_1 \Delta < 0$
			Elipse imaginaria, si $\lambda_1 \Delta > 0$
			Punto, si $\Delta = 0$
$\delta < 0$	Hiperbólico	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = \frac{-\Delta}{\delta}$	Hipérbola, si $\Delta \neq 0$
			Par de rectas secantes, si $\Delta = 0$
$\delta = 0$ ( $\lambda_1 = 0$ ) ( $\lambda_2 \neq 0$ )	Parabólico	$\lambda_2 y^2 = \pm 2\sqrt{\frac{-\Delta}{\lambda_2}}x$	Parábola, si $\Delta \neq 0$
		$\lambda_2 y^2 = c$	Par de rectas paralelas, si $\Delta = 0$ y $c\lambda_2 > 0$
			Recta doble, si $\Delta = 0$ y $c = 0$
			Par de rectas imaginarias, si $\Delta = 0$ y $c\lambda_2 < 0$